LE

PRINCIPE DE RELATIVITÉ

ET LA

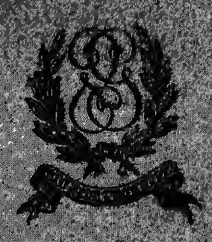
THÉORIE DE LA GRAVITATION

LEÇONS PROFESSÉES EN 1921 ET 1922 A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ET AU MUSÉUM D'HISTOIRE NATURELLE

PAR

M. Jean BECQUEREL

PROFESSEUR AU MUSÉUM NATIONAL D'HISTOIRE NATURELLE



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins

1922

LE

PRINCIPE DE RELATIVITÉ

ET LA

THÉORIE DE LA GRAVITATION

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
65274 Quai des Grands-Augustins, 55.

LE

PRINCIPE DE RELATIVITÉ

ET LA

THÉORIE DE LA GRAVITATION

LEÇONS PROFESSÉES EN 1921 ET 1922 A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ET AU MUSÉUM D'HISTOIRE NATURELLE

PAR

M. Jean BECQUEREL

PROFESSEUR AU MUSÉUM NATIONAL D'HISTOIRE NATURELLE



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins

1922

AU GRAND INITIATEUR ET DÉFENSEUR
DES THÉORIES RELATIVISTES EN FRANCE

MON COLLÈGUE ET AMI

PAUL LANGEVIN

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

ERRATA ET ADDITIONS.

Page 5, ligne 12, *au lieu de* le principe de relativité, *lire* la théorie nouvelle.

Pages 6 et 7, remplacer les quatre dernières lignes de la page 6 et les quatre premières lignes de la page 7 par ce qui suit : considérons, en effet, deux systèmes S et S′ dans chacun desquels les observateurs ont des horloges identiques Prenons A comme événement origine du temps dans chacun des systèmes; B se produit à l'époque t du système S et à l'époque t' du système S′; la simultanéité étant absolue, les indications t et t' des deux horloges constituent deux événements simultanés, non seulement pour les observateurs des systèmes S et S′, mais pour tout observateur; cela signifie que les heures marquées sont les mêmes pour tous les observateurs : l'intervalle de temps séparant A et B est absolu.

Page 15, ligne 8, *lire :* la vitesse apparente de la lumière devrait varier avec la direction : cette variation aurait pour conséquence un effet du second ordre que Michelson, etc.

Page 17, ligne 7, *lire :* frange centrale noire.

Page 17, ligne 17, *lire :* ces vitesses, ainsi que les vitesses suivant les directions opposées (retour des rayons) étant inégales, etc.

Page 18, ligne 10, *lire :* de manière que la différence des temps mis par la lumière à parcourir les deux bras, aller et retour, soit la plus grande possible, et pour cela orienter, etc.

Page 21, ligne 23, *ajouter :* l'indépendance de la vitesse de la lumière et de l'état de mouvement de la source lumineuse est conforme à l'expérience, ainsi que de Sitter l'a établi par l'observation des étoiles doubles très éloignées.

Page 27, ligne 27, *au lieu de* principe de l'invariance, etc., *lire* principe de l'isotropie de propagation de la lumière (n° 10) ont pour conséquence, etc.

Page 39, formule du n° 19, *lire* $\dfrac{v + \dfrac{c}{n}}{1 + \dfrac{v}{cn}}$.

Page 39, *addition au* n° 19 : Il est à remarquer que $\frac{c}{n}$ est la vitesse de la phase; cette vitesse a une signification purement géométrique : la phase ne peut pas servir à envoyer un signal, et lorsque $\frac{c}{n} > c$, il n'y a dans ce fait aucune contradiction avec l'affirmation qu'un signal ne se propage jamais avec une vitesse supérieure à c.

Page 40, citation de Minkowski, *au lieu de* disparaître dans l'ombre, *lire* disparaître comme des fantômes.

Page 51, ligne 27, *lire :* 2° Dans les mêmes conditions, etc.

Page 52, ligne 3, *lire :* 3° Avec P. Langevin, etc.

Page 61, ligne 1, *au lieu de* t_2, *lire* t.

Page 65, ligne 2, et page 66, ligne 5, *au lieu de* T, *lire* T_A.

Page 73, dernière ligne, *lire :* un point P.

Page 74, formule (10-7), *au lieu de* z', *lire* x'.

Page 81, aux équations (1-8), *ajouter :*

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Page 82, ligne 16, *au lieu de* champ magnétique, *lire* induction magnétique.

Page, 86, *Remarque :* Lorsque la tige est en mouvement, le champ électromagnétique n'est plus le champ initial. Pour supprimer toute ambiguïté, à partir de la 29e ligne, remplacer les X', Y', Z' par X'_1, Y'_1, Z'_1 ; X, Y, Z, L, M, N par X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1, et lire la formule finale du n° 34 :

$$Z_1 lc = -vlM_1 = -\frac{1}{\alpha^2} vlM,$$

vlM_1 est le flux coupé, etc.

Page 88, ligne 15, *lire :* des produits des trois composantes A_1, A_2, A_3, etc.

Page 93, formule (19-8), *au lieu de* V', *lire* V au dénominateur.

Page 97, avant-dernière ligne, *ajouter* (*i* électromagnétique); et, dans la formule de Laplace, *supprimer* $\frac{1}{c}$.

Page 100, ligne 24, *lire* Oy et Oz.

Page 134, lignes 9 et 10, *lire :* doivent, pour être exprimées sous la forme la plus générale, contenir implicitement ou explicitement les grandeurs, etc.

Page 136 (n° 57). *Remarque :* Nous avons reproduit, à peu de chose près, le raisonnement d'Einstein. (La relativité restreinte et généralisée mise à la portée de tout le monde.) Il nous semble cependant que l'observateur immobile au centre doit trouver $\pi' < \pi$: si, en effet, la circonférence est jalonnée par N piquets équidistants, l'observateur trouve évidemment que la circonférence contient toujours le même nombre N d'arcs élémentaires, que le disque soit au repos ou en rotation. Mais quand le disque tourne, chaque arc élémentaire est devenu plus court pour l'observateur, celui-ci estime donc que la circonférence s'est raccourcie.

Page 142, lignes 17 et suivantes, *lire :* un corps abandonné à lui-même dans un champ de gravitation ne se meut pas d'un mouvement rectiligne et uniforme parce qu'il subit une force appliquée. Il faut dire : un corps abandonné à lui-même se meut toujours suivant la loi d'inertie, *la loi d'action stationnaire*

$$\delta \int ds = 0;$$

mais cette loi n'est plus celle de Galilée parce qu'il est impossible de trouver un système qui soit galiléen dans toute l'étendue de l'Univers, parce que les lignes d'Univers naturelles, etc.

Page 142, ligne 27, *lire :* la déformation de l'Espace-Temps à partir de la forme euclidienne, etc.

Page 144, dans la seconde des formules (12-12), *au lieu de* $x_3 \cos \omega x_4$, *lire* $x_2 \cos \omega x_4$, et, dans les formules (13-12), *lire :* $\omega(x_1 \cos \omega x_4 - x_2 \sin \omega x_4)\, dx_4$.

Page 167, formule (38-13), *lire :* $A_{\lambda\mu\nu} = \dfrac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \lambda\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} A_{\varepsilon\mu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} A_{\lambda\varepsilon}$.

Page 184, formule (11-14), *au lieu de* $g^{\rho\rho}$, *lire* $g^{\sigma\rho}$.

Page 155, lignes 5, 6, 7, *lire :*

$$
\begin{aligned}
= -\frac{1}{4} g^{\sigma\rho} g^{\beta\alpha} \Bigg[& \frac{\partial^2}{\partial x_\sigma\, \partial x_\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x_\beta} \right) \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x_\rho\, \partial x_\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta} \right) \\
& - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu\, \partial x_\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x_\beta} \right) \Bigg].
\end{aligned}
$$

Page 188, équation (15-14), *lire :*

$$
\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0.
$$

Page 203, ligne 33, *lire :* $\sum \rho v'_{X\alpha} v'_{X\beta}$.

Page 207, à la fin du n° 85, *ajouter :* Il est à noter que si les forces $\left\{ \begin{matrix} \mu 4 \\ 4 \end{matrix} \right\}$ sont les forces principales dans un champ de gravitation permanent et en coordonnées presque galiléennes, il peut en être autrement pour un champ de force purement géométrique dans un univers euclidien. Ainsi, dans un système de rotation (n° 60), les $\left\{ \begin{matrix} \mu 4 \\ 4 \end{matrix} \right\}$ sont nuls; si ωc est la vitesse angulaire, les forces sont déterminées par

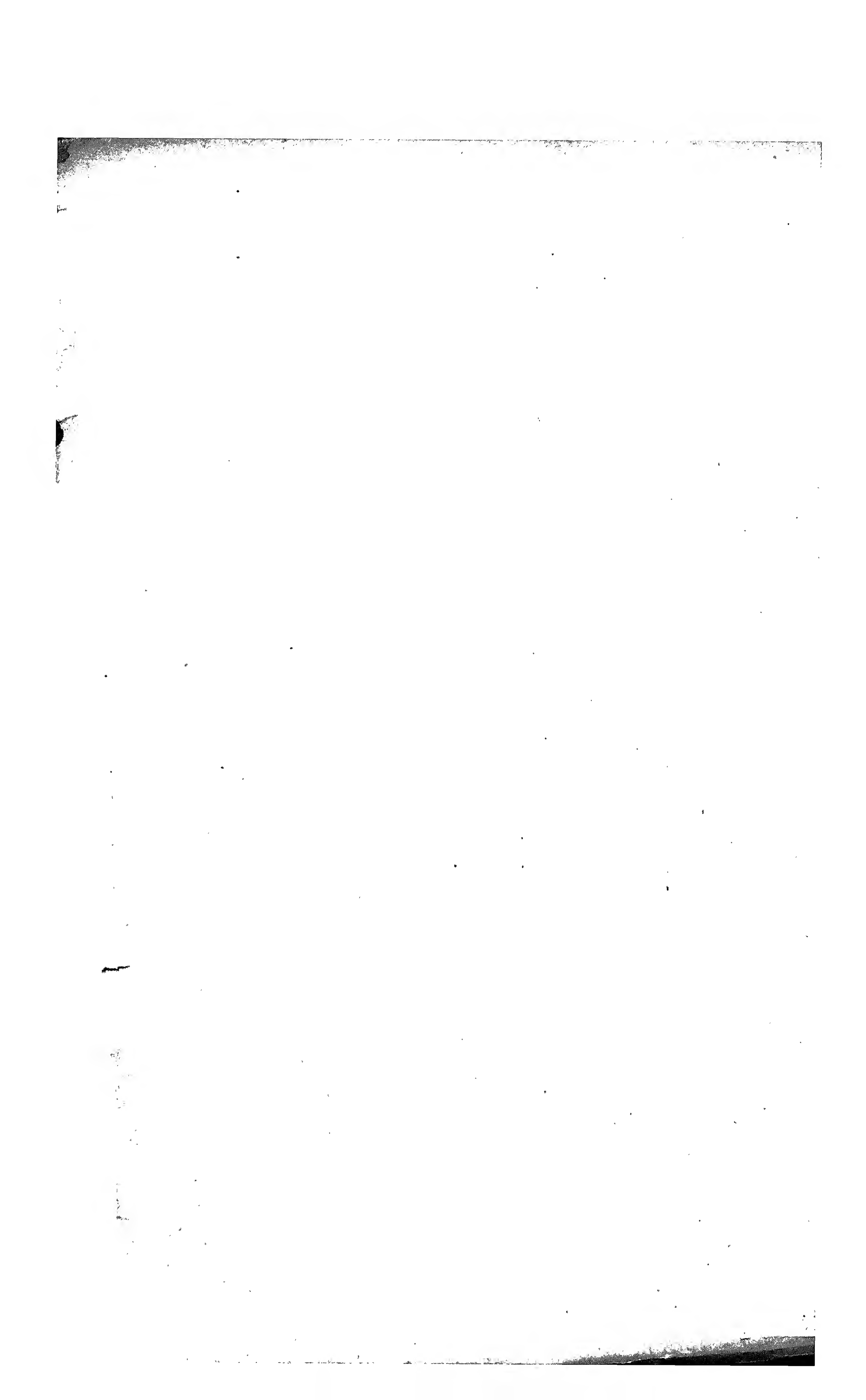
$$
\left\{ \begin{matrix} 14 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \omega, \qquad \left\{ \begin{matrix} 24 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\omega \qquad \text{(force de Coriolis)},
$$

$$
\left\{ \begin{matrix} 44 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\omega^2 x_1, \qquad \left\{ \begin{matrix} 44 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\omega^2 x_2 \qquad \text{(force centrifuge)}.
$$

Page 208, ligne 19, *lire :* $-\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Page 216, avant-dernière ligne, *lire :* $\dfrac{1}{v^2} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ — etc...

Page 220, ligne 19, *au lieu de* c^2, *lire :* $\dfrac{1}{c^2}$.



LE

PRINCIPE DE RELATIVITÉ

ET LA

THÉORIE DE LA GRAVITATION

INTRODUCTION.

Une théorie nouvelle a révolutionné les notions fondamentales sur lesquelles reposaient la mécanique et la physique. Albert Einstein, ayant eu l'audace d'abandonner les idées basées sur les apparences les plus familières, a développé cette théorie, avec une saisissante continuité de pensée, en deux grandes étapes : celle de la relativité restreinte au mouvement non accéléré (1905) et depuis 1912 celle de la relativité généralisée. S'étant élevé au-dessus de Copernic, de Galilée et de Newton, Einstein a découvert la loi de la gravitation et a été conduit à une impressionnante conception de l'Univers.

Les premiers hommes ont considéré la Terre comme plane; pendant longtemps on a pensé que la Terre était le centre du Monde; des illusions aussi profondes, mais plus difficiles à reconnaître et à abandonner, règnent encore aujourd'hui : on croit que l'espace et le temps sont absolus et indépendants l'un de l'autre, on considère le temps comme universel, l'espace comme formant un univers euclidien et infini.

Cependant, l'espace dans lequel nous mesurons des distances, le temps que nous évaluons à l'aide d'horloges, ne sont ni absolus ni indépendants : ils sont unis et forment un Univers à quatre dimensions; seule cette union possède une individualité. La théorie de la relativité généralisée nous montrera que l'Espace-Temps n'est

pas régi dans son ensemble par les lois de la géométrie d'Euclide : on doit étendre la notion de courbure à cette multiplicité quadridimensionnelle, et la courbure de l'Univers se manifeste par le phénomène de la gravitation.

Dans l'Espace-Temps existe la matière, et plus généralement l'énergie dont la matière est un des aspects.

Il n'y a plus, comme en mécanique rationnelle, de masse invariable caractérisant une quantité déterminée de matière; la notion de masse se confond avec celle d'énergie; la masse d'un corps mesure son énergie totale; elle varie avec la vitesse, et elle est relative à l'observateur car il n'y a pas de vitesse absolue, toutes les vitesses de translation étant relatives.

La mécanique classique garde cependant toute son importance, car, bien que les notions d'espace et de temps sur lesquelles elle est basée soient inexactes, les lois auxquelles elle conduit sont d'excellentes approximations, toujours valables dans la pratique, en général suffisantes en astronomie et en physique. Toutefois certains écarts aux lois classiques doivent être expliqués, et il est nécessaire de savoir pourquoi ces lois ne sont pas, comme on le croyait, l'expression exacte de la réalité.

On doit répandre aujourd'hui les idées nouvelles. Elles ne conduisent pas à une complication de la Science; bien au contraire il en résulte une admirable harmonie, une merveilleuse synthèse des lois naturelles, par laquelle on aperçoit pour la première fois les liens qui unissent des phénomènes en apparence indépendants.

Le souci de la vérité, la satisfaction qu'éprouve l'esprit à pénétrer plus avant dans la compréhension des phénomènes, compensent largement les efforts que demande l'étude du principe de relativité. La principale difficulté qu'on rencontre vient de la répugnance à abandonner des idées acquises, et de l'étonnement où l'on est plongé devant certaines conséquences qui, par leur étrangeté, choquent ce que l'on considère comme le bon sens. Il faut, en abordant cette étude, avoir le courage de renoncer résolument aux idées préconçues.

PREMIÈRE PARTIE.

LA RELATIVITÉ RESTREINTE.

CHAPITRE I.

LES NOTIONS ANCIENNES D'ESPACE ET DE TEMPS.

Nous allons analyser les conceptions sur lesquelles sont fondées la géométrie et la mécanique rationnelle. Cette étude nous conduira à l'expérience célèbre par laquelle Michelson avait pensé mettre en évidence le mouvement absolu de la Terre; nous rencontrerons une discordance complète entre l'effet prévu et le résultat expérimental et nous chercherons les causes profondes de ce désaccord.

1. Groupes de transformations de coordonnées. Groupe de la géométrie.

Soit, dans l'espace, un corps immobile par rapport à l'observateur; pour repérer la position de ce corps, nous pouvons choisir un système d'axes rectangulaires quelconque, que nous supposerons également immobile. Ce système $S(x, y, z)$ nous permettra d'exprimer les distances des différents points du corps, les angles, la surface, le volume.

Changeons maintenant de système de coordonnées, en prenant un second système de référence $S'(x', y', z')$. Les formules de transformation de coordonnées sont les relations bien connues qui expriment les coordonnées nouvelles x', y', z' en fonction des coordonnées anciennes x, y, z (et inversement); ces relations font intervenir six paramètres qui définissent la position relative des deux systèmes d'axes S et S'.

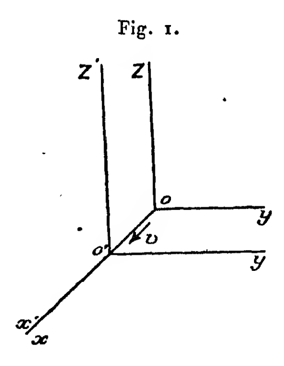
Avec les coordonnées nouvelles, nous pourrons exprimer, par des formules ayant même forme que les précédentes, les distances des points du corps, les angles, etc.

La propriété essentielle de ces formules de transformation de coordonnées est qu'elles forment un *groupe* (1), c'est-à-dire que si nous effectuons successivement deux transformations de ce genre, la première correspondant au passage de $S(x, y, z)$ à $S'(x', y', z')$, la seconde au passage de $S'(x', y', z')$ à un troisième système $S''(x'', y'', z'')$, les relations entre les coordonnées x, y, z et les coordonnées x'', y'', z'' sont exprimées par des formules de même genre correspondant au passage direct du premier système S au troisième système S''.

L'ensemble de toutes ces transformations de coordonnées, correspondant à toutes les valeurs possibles des six paramètres qui caractérisent une transformation, jouit donc de cette propriété que l'emploi successif d'un nombre quelconque de transformations de ce groupe est équivalent à une transformation unique du même groupe.

Groupe de la cinématique. — Considérons maintenant un système $S'(x', y', z')$ en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier système S, avec une vitesse v. Pour envisager

Fig. 1.



le cas le plus simple, supposons que les axes des x' et des x soient confondus et parallèles à la direction de la vitesse, que les axes

(1) P. LANGEVIN, *Bulletin de la Société de Philosophie*, janvier 1912.

des y' et des y, des z' et des z soient parallèles et que les origines O′ et O coïncident à l'origine du temps $t = 0$. Les formules de transformation sont les suivantes :

$$(1-1)\,[1] \qquad x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

Ces trois relations définissent une transformation dépendant d'un seul paramètre v et toutes les transformations de ce genre correspondant à toutes les valeurs de v constituent un groupe, car deux transformations successives de vitesses v et v' équivalent à une transformation unique de même forme, de vitesse $v'' = v + v'$.

Ce groupe porte le nom de *groupe de Galilée*.

Il était utile d'appeler, dès le début, l'attention sur les groupes de transformations, car nous verrons que le principe de relativité est basé sur le fait que les équations fondamentales de la mécanique classique et celles du champ électromagnétique n'admettent pas le même groupe de transformations.

2. Les invariants fondamentaux de l'ancienne conception de l'Univers. Le temps et l'espace absolus [2].

Toutes nos observations, toutes les sensations par lesquelles nous percevons l'Univers font intervenir à la fois l'espace et le temps, car elles sont déterminées, non pas uniquement par des positions ou des formes dans l'espace, mais par des *événements* qui se produisent à un certain lieu et à une certaine époque. Tout événement possède quatre coordonnées : trois coordonnées d'espace et une coordonnée de temps.

D'autre part, les lois de notre science sont des relations entre diverses grandeurs mesurées par l'observateur; pour que ces lois correspondent à une réalité objective, il faut qu'elles puissent s'exprimer sous une forme indépendante de l'observateur et indépendante du système de coordonnées que celui-là a choisi; c'est l'idée qui a guidé Einstein dans tout le développement de sa

---

[1] Le numérotage des formules sera fait de la façon suivante : $(n-p)$ signifie la $n^{\text{ième}}$ formule du Chapitre p.

[2] P. Langevin, *Bulletin de la Société de Philosophie*, janvier 1912; *L'évolution de l'espace et du temps* (*Scientia*, 1911).

théorie. On voit qu'il est tout d'abord essentiel de dégager des observations les éléments *invariants*, c'est-à-dire ceux qui sont indépendants de tout système de référence.

Le temps absolu. — Dans la conception ancienne, un postulat fondamental est celui qui fait jouer au temps le rôle d'invariant : c'est l'*hypothèse du temps universel et absolu*. Cherchons quelle peut être l'origine de cette notion de temps absolu.

Imaginons un certain nombre de systèmes de référence en mouvement les uns par rapport aux autres; dans chaque système se trouve un observateur, immobile par rapport à son système.

Deux événements A et B se produisent : pour l'observateur d'un des systèmes, A est antérieur à B. Pourquoi se croit-on obligé d'admettre que A est nécessairement antérieur à B dans tous les systèmes?

Cela tient à ce qu'on suppose implicitement que A a pu être la cause de B, ou tout au moins à ce qu'on admet que l'événement A aurait pu influencer l'événement B. Il serait évidemment absurde de supposer que, pour certains observateurs, l'effet puisse être antérieur à sa cause : on est donc conduit à penser que l'ordre de succession de deux événements est toujours bien déterminé, qu'il est le même dans tous les systèmes.

Demandons-nous maintenant pourquoi on admet que B a toujours pu être prévenu de A : c'est parce qu'on suppose la possibilité d'une causalité pouvant se propager *instantanément*. Or cette possibilité, non seulement est compatible avec la mécanique rationnelle, mais est exigée par la mécanique puisqu'on admet la conception du solide parfait : avec une tige rigide, on aurait pu signaler instantanément la production du premier événement au point où le second va se produire et influencer ce second événement.

La notion de possibilité d'une propagation instantanée entraîne celle de simultanéité absolue : deux événements simultanés dans un système sont simultanés dans tous les autres. Il résulte de là que la durée qui sépare deux événements A et B est la même pour tous les observateurs : considérons, en effet, deux systèmes S et S′; soient α et β deux événements se produisant dans le système S et simultanés avec A et B dans ce système, α' et β' deux événements simultanés avec A et B dans le système S′; la simultanéité étant

V. errata

absolue, α et α' sont simultanés, ainsi que β et β' ; donc l'intervalle de temps qui sépare α et β dans le système S est égal à l'intervalle qui sépare α' et β' dans S', égal aussi à celui qui sépare A et B. C'est bien le *temps absolu*.

Ainsi, les notions de solide parfait, de propagation instantanée, de simultanéité absolue, de durée absolue s'unissent et s'adaptent complètement les unes aux autres. Qu'une de ces notions vienne à être renversée, tout l'échafaudage s'écroulera.

L'espace absolu. — La notion d'espace absolu dérive aussi de l'idée du solide parfait, ou encore de l'invariance de forme des figures géométriques.

La géométrie n'envisage que des événements simultanés, car *la forme d'un objet est l'ensemble des positions simultanées de tous ses points* (définition de P. Langevin). Puisqu'on suppose que la simultanéité est absolue, une figure géométrique a une forme absolue, indépendante de l'état du mouvement du système de référence : un corps qui a la forme d'une sphère pour un observateur doit, d'après les idées anciennes, être encore une sphère pour tout observateur en mouvement par rapport au premier.

L'invariant fondamental de l'espace est la distance spaciale de deux événements *simultanés*. Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ les coordonnées d'espace de ces événements dans un premier système S; soient $x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2$ les coordonnées des deux mêmes événements dans un second système S'. La distance de ces événements est donnée par les équations

$$(2\text{-}1)\quad \begin{cases} l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \text{ dans le système S;} \\ l'^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \text{ dans le système S'.} \end{cases}$$

Si les systèmes S et S' sont immobiles l'un par rapport à l'autre, l'application des formules de transformation de coordonnées de la géométrie montre que $l = l'$. D'ailleurs c'est cette condition d'invariance qui définit entièrement le groupe de la géométrie.

Si S et S' sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, l'application des formules du groupe de Galilée donne encore $l = l'$; le temps s'élimine parce que, la simultanéité était supposée absolue, les événements sont simultanés dans les deux systèmes à la fois.

Ainsi, *dans la conception ancienne, la distance spaciale de*

deux événements est un invariant, sous la condition essentielle que ces événements soient simultanés.

D'autres invariants sont d'ailleurs envisagés en géométrie : ce sont les angles, surfaces, volumes.

Les équations qui expriment les lois de la géométrie sont les mêmes dans tous les systèmes d'axes, car elles ne changent pas de forme par application des formules de transformation de coordonnées.

Cette invariance de forme correspond à une réalité indépendante de tout système de référence : cette réalité est *l'espace de la géométrie euclidienne, l'espace absolu.*

3. Distance dans l'espace de deux événements non simultanés.

Lorsque deux événements ne sont pas simultanés, leur distance spaciale n'est plus un invariant : elle est fonction du système de référence. Par exemple : un observateur quitte un lieu A dans un véhicule qui le transporte dans un lieu B, au bout d'un temps déterminé. Le départ de A et l'arrivée en B sont deux événements. Dans un système lié à la Terre, la distance spaciale de ces deux événements est la distance AB; dans le système de l'observateur, c'est-à-dire dans un système d'axes lié à l'observateur, la distance est nulle, puisque les points *de ce système* où se sont passés les événements sont en coïncidence.

La distance de deux événements non simultanés est donc relative au système de référence; évidemment elle doit avoir une valeur absolue dans l'espace absolu, mais l'observateur ne peut pas déterminer la distance absolue parce que, ignorant son propre mouvement dans l'espace absolu, il ne peut pas tenir compte du trajet qu'il a parcouru dans l'espace absolu pendant le temps écoulé entre les deux événements.

La cinématique classique conduit donc à envisager une dissymétrie entre les propriétés de l'espace et celles du temps : l'espace est absolu pour les événements simultanés, relatif pour des événements non simultanés, alors que le temps est toujours supposé absolu. L'espace et le temps jouent des rôles différents dans la conception ancienne.

Nous verrons disparaître cette dissymétrie dans l'Espace-Temps de la théorie nouvelle.

4. La dynamique newtonienne.

La cinématique est définie par le groupe de Galilée. La dynamique ajoute les notions de masse et de force.

La masse (coefficient d'inertie) d'une portion de matière est *a priori* considérée comme constante, indépendante des changements d'état que la portion de matière peut subir, indépendante de l'état de repos ou de mouvement : c'est un invariant qui a même valeur dans tous les systèmes de référence et qui caractérise une quantité déterminée de matière.

La force est un vecteur d'espace; ses composantes se comportent comme les projections d'une distance sur les axes de coordonnées.

Écrivons de nouveau le groupe de Galilée :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z'. \end{array}\right.$$

On a immédiatement

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt}.$$

Si la vitesse v de O′ dans le système S est, non plus parallèle à Ox, Ox', mais d'orientation quelconque, et a pour composantes v_x, v_y, v_z, on a

$$\text{(3-1)} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_x, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} + v_y, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} + v_z;$$

c'est le théorème de l'addition des vitesses qui se composent géométriquement suivant la règle du parallélogramme. Une seconde dérivation donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2};$$

m étant la masse d'un point matériel, X, Y, Z; X′, Y′, Z′ les

composantes de la force F dans les systèmes S et S′, les équations du mouvement s'écrivent

$$(4\text{-}1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=X, & m\dfrac{d^2y}{dt^2}=Y, & m\dfrac{d^2z}{dt^2}=Z & \text{(système S)},\\ m\dfrac{d^2x'}{dt^2}=X', & m\dfrac{d^2y'}{dt^2}=Y', & m\dfrac{d^2z'}{dt^2}=Z' & \text{(système S')}, \end{cases}$$

avec $X=X'$, $Y=Y'$, $Z=Z'$. Plus généralement, si les axes des deux systèmes, au lieu d'être parallèles, ont une orientation relative quelconque, on a encore (4-1), avec

$$F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2}.$$

Les équations fondamentales de la dynamique conservent donc leur forme quand on passe d'un système de référence à un autre système en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier. On peut les résumer par la *relation vectorielle, indépendante de tout système de coordonnées,*

$$m\vec{\gamma}=\vec{F},\quad \vec{\gamma} \text{ étant le vecteur accélération.}$$

L'invariance des lois de la mécanique permet d'en donner des énoncés *intrinsèques*, par l'introduction d'éléments *vectoriel* (vitesse, accélération, force, etc.), *tensoriels* (moments d'inertie déformations élastiques, tensions élastiques, etc.) et *scalaire* (masse, énergie, etc.), de même que les invariants de la géométri (distances, angles, etc.) permettent d'énoncer les théorèmes san faire intervenir des axes de coordonnées.

5. Le caractère relatif du mouvement de translation uniforme et le caractère absolu de l'accélération.

Puisque les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous l systèmes en mouvement de translation uniforme, *il est impossibl par des expériences mécaniques faites à l'intérieur d'un sy tème clos, de mettre en évidence un mouvement de translatic uniforme de ce système.*

Le mouvement de translation uniforme n'a donc pas un cara tère absolu ; on ne peut parler de translation uniforme que rela

vement à un corps de référence considéré, par convention, comme au repos.

Ce principe constitue le principe de relativité de la mécanique newtonienne. Il est conforme à l'expérience.

Par contre, toute accélération a un caractère absolu et peut être mise en évidence par des expériences intérieures à un système; l'état d'accélération d'un système se manifeste par un champ de force d'inertie. En particulier, il y a rotation absolue, comme le prouvent les effets de force centrifuge en statique et de force centrifuge composée en dynamique : les astres auraient pu être perpétuellement masqués par un rideau de nuages, on aurait néanmoins mesuré la rotation de la Terre par l'expérience du pendule de Foucault.

CHAPITRE II.

LA RECHERCHE DU MOUVEMENT ABSOLU.

Si, par des expériences mécaniques à l'intérieur d'un système clos, il est impossible de révéler un mouvement de translation uniforme de ce système, il en est autrement lorsque le système n'est plus clos, lorsque l'observateur peut se mettre en relation avec un milieu extérieur. Il devient alors possible de mettre en évidence et de mesurer la vitesse *par rapport au milieu extérieur*.

Précisément, pour expliquer la propagation des ondes électromagnétiques, les physiciens avaient supposé l'existence d'un milieu doué de propriétés quasi matérielles, *l'éther*, remplissant tout l'espace, et pénétrant la matière. On devait donc espérer, par des expériences électromagnétiques ou optiques, révéler un mouvement de translation par rapport à l'éther. L'éther s'identifiant en quelque sorte avec l'espace, on a appelé ce mouvement le *mouvement absolu*.

6. L'expérience de Fizeau « entraînement des ondes lumineuses par la matière ».

Tout d'abord, une question se pose : l'éther ne serait-il pas entraîné par la matière en mouvement? s'il en était ainsi, et si l'entraînement était total, il serait impossible de déterminer le mouvement absolu.

Fresnel a déduit de l'aberration de la lumière, par application de la théorie mécanique de la lumière, que l'éther devait être entraîné partiellement : soient n l'indice de réfraction d'un corps transparent, v la vitesse de ce corps; l'éther doit être entraîné

avec une vitesse u :

$$u = v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

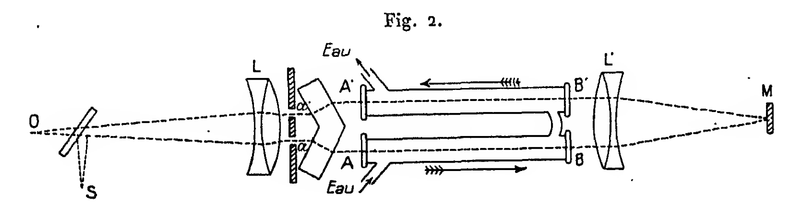
de sorte que, si c est la vitesse de la lumière dans l'espace vide de matière et c' la vitesse de la lumière, pour une radiation d'indice n, dans le corps en mouvement, on doit avoir

$$c' = \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \tag{1-2}$$

la vitesse d'entraînement $v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ s'ajoutant à la vitesse $\frac{c}{n}$ dans le corps au repos ou se retranchant de cette vitesse selon que le sens du mouvement du corps est celui de la propagation des ondes ou le sens opposé.

Fizeau a vérifié expérimentalement la formule de Fresnel.

Fig. 2.



Une source de lumière est placée en S. Les ondes lumineuses, réfléchies par une lame de verre à faces parallèles, sont rendues parallèles par un objectif achromatique L. Deux rayons traversent les fentes a et a', sont écartés par une bi-lame AA', passent dans les tubes AB, A'B', puis sont reçus sur une lentille L' qui les concentre en son foyer M; en ce point, un miroir les renvoie au point de départ et l'on observe le retour en O. L'un des rayons suit le chemin aABMB'A'a'O, l'autre rayon le chemin a'A'B'MBAaO; en O on observe des franges d'interférences.

Si les tubes AB et A'B' sont remplis d'eau et si l'on communique à l'eau des mouvements de sens opposés, on voit que le rayon ABMB'A' traverse les tubes toujours dans le sens du mouvement, alors que l'autre rayon chemine toujours en sens contraire du sens du courant d'eau. Les franges ont, dans ces conditions, une netteté remarquable, malgré le défaut d'homogénéité inévitable des milieux traversés (inégalités des tempéra-

tures, des densités, etc.), parce que les deux rayons qui interfèrent ont traversé exactement les mêmes milieux.

Soient v la vitesse de l'eau, k le coefficient d'entraînement des ondes lumineuses, l la longueur de chaque tube. Le temps employé par le rayon A' à parcourir les deux tubes est $\frac{2l}{\frac{c}{n} - kv}$; le temps employé par le rayon A est $\frac{2l}{\frac{c}{n} + kv}$. La différence des temps a pour valeur

$$2l\left(\frac{1}{\frac{c}{n} - kv} - \frac{1}{\frac{c}{n} + kv}\right) = \frac{4lkv}{\left(\frac{c}{n}\right)^2 - k^2v^2},$$

ou approximativement, k^2v^2 étant négligeable devant $\left(\frac{c}{n}\right)^2$,

$$\theta = \frac{4n^2lkv}{c^2}.$$

La différence de phase des deux rayons qui interfèrent, c'est-à-dire le déplacement des franges évalué en nombre de franges, est

$$\varphi = \frac{4l}{\lambda} n^2 \frac{kv}{c}.$$

On constate effectivement un déplacement des franges. Les mesures ont bien donné $k = 1 - \frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire $u = v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

L'expérience de Fizeau a été considérée comme la preuve de l'existence de l'éther et de son entraînement partiel par la matière en mouvement.

Mais H.-A. Lorentz a établi que l'expérience de Fizeau ne permet pas de conclure que l'éther est entraîné, car elle s'explique par l'entraînement des électrons qui modifient la vitesse de propagation de la lumière. Dans la théorie de Lorentz, l'éther est immobile.

D'ailleurs, même s'il y avait entraînement de l'éther, le coefficient d'entraînement par l'air serait négligeable et l'expérience de Michelson, que nous allons décrire, devrait révéler un mouvement de translation de la Terre par rapport au milieu qui propage les ondes lumineuses.

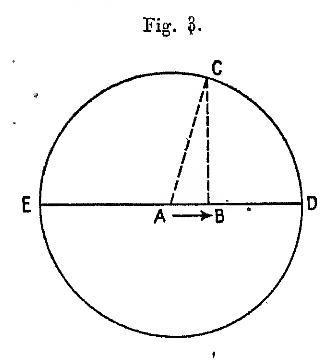
7. L'expérience fondamentale de Michelson.

La théorie mécanique de la lumière conduit à la conclusion que pour les expériences optiques dites *du premier ordre*, c'est-à-dire pour les observations dont la précision est de l'ordre de grandeur du rapport $\frac{v}{c}$, tout se passe dans chaque système de référence comme si celui-ci était immobile par rapport à l'éther. Mais la théorie prévoit un effet du second ordre : pour un observateur en mouvement par rapport à l'éther, la vitesse apparente de la lumière devrait varier avec la direction d'une quantité du second ordre. C'est cette variation prévue que Michelson a tenté de mettre en évidence par une expérience d'une extrême délicatesse.

V. errata

Imaginons que d'un point A dans l'éther immobile parte un signal lumineux instantané. Une seconde plus tard, l'ébranlement

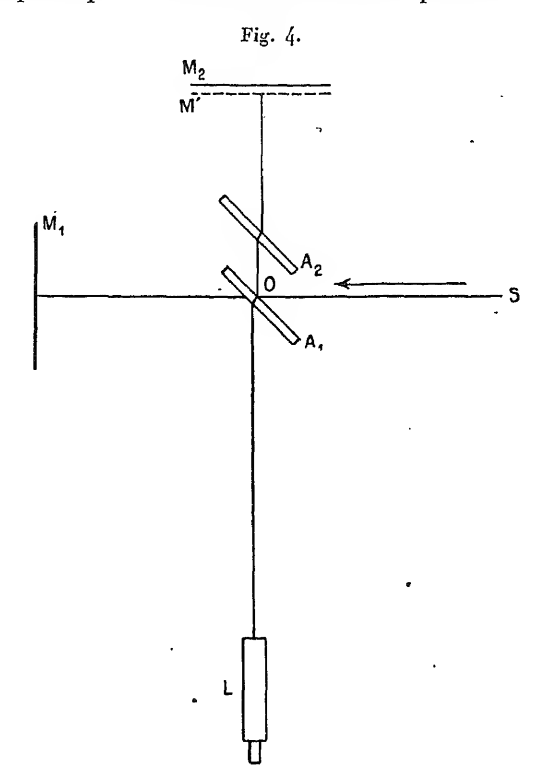
Fig. 3.



formera une surface d'onde sphérique de rayon c ayant pour centre le point A. Un observateur parti de A en même temps que le signal, dans la direction Ox et avec la vitesse v, sera à la distance $AB = v$ au bout d'une seconde; il ne se trouvera donc plus au centre de la sphère et, pour lui, la lumière ne se propagera pas avec la même vitesse dans toutes les directions : la vitesse de la lumière, relativement à cet observateur, devra être $BD = c - v$ dans la direction de la vitesse v, $BE = c + v$ dans la direction opposée et $BC = \sqrt{c^2 - v^2}$ dans la direction perpendiculaire. L'observateur devra pouvoir constater et mesurer cet effet. Voici comment Michelson a réalisé l'expérience.

Michelson s'est servi de son interféromètre, dont nous allons rappeler le principe. Un faisceau de lumière parallèle tombe sous

Fig. 4.



l'incidence de 45° sur une lame de verre A_1 dont la première face est légèrement argentée; cette lame réfléchit une partie du faisceau et laisse passer l'autre partie. Après réflexion normale sur les miroirs M_1 et M_2, qui sont placés sur deux bras rectangulaires, on obtient deux faisceaux qui se superposent suivant la direction OL et qui interfèrent; ils sont reçus dans une lunette L. Tout se passe comme si le rayon SOM_1OL avait parcouru le chemin $SOM'OL$, m' étant l'image, appelée *plan de référence*, du miroir M_1 produite par la lame argentée.

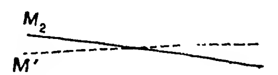
Une lame A_2 sert de compensateur, de manière que chaque rayon traverse trois épaisseurs de lame; en faisant tourner A_2, on change le chemin optique et l'on déplace les franges.

Si M_2 et le plan de référence M' sont parallèles, on voit, en

lumière monochromatique et en pointant à l'infini, des anneaux circulaires.

Si les deux bras de l'appareil ont même longueur, c'est-à-dire si M_2 et M' coïncident, en inclinant légèrement M_2 on voit des

Fig. 5.



franges rectilignes localisées sur M_2M'; ce sont les franges d'égales épaisseurs de la lame d'air comprise entre M_2 et M'. En lumière blanche, on voit une frange centrale et, de part et d'autre de la frange centrale, quelques franges irisées.

La Terre est en mouvement dans l'éther; donc, pour l'observateur entraîné avec elle, la vitesse de la lumière doit dépendre de la direction.

Considérons de nouveau la surface sphérique sur laquelle doit se trouver un ébranlement lumineux au bout de l'unité de temps. La Terre se trouve en B; par ce point, menons des parallèles aux

Fig. 6.

deux bras de l'appareil : BF et BG sont les vitesses de la lumière, relativement à l'observateur, suivant les directions des deux bras de l'interféromètre; ces vitesses étant inégales, la frange centrale ne doit pas occuper la position qu'elle aurait si la vitesse était la même suivant les deux bras, et cette frange doit se déplacer quand on tourne l'appareil, qui est mobile sur une plate-forme.

Supposons qu'en faisant tourner l'appareil on n'observe aucun déplacement des franges par rapport au réticule de la lunette; si

l'on considère la théorie précédente comme exacte, on doit pe que B est resté au centre de la sphère, c'est-à-dire qu'à ce moi particulier, la Terre est immobile dans l'éther, que sa vitess translation sur son orbite se trouve, par hasard, compenser exa ment la vitesse du système solaire dans l'éther. Mais alors, six plus tard, la Terre, ayant sur son orbite une vitesse égale, opposée à celle qu'elle avait la première fois, aura, par rappo l'éther, une vitesse égale au double de sa vitesse de translatior son orbite, c'est-à-dire une vitesse $v = 60$ km : sec. Pour obse l'effet, on devra placer l'appareil de manière que la différence vitesses de la lumière dans les directions des deux bras soit la grande possible, c'est-à-dire orienter l'un des bras dans la d tion de la translation de la Terre sur son orbite : on observe franges en les repérant avec le réticule, puis on permutera les des deux bras en faisant tourner la plate-forme de $\frac{\pi}{2}$; on d alors observer un déplacement des franges par rapport à leur tion précédente. Calculons ce déplacement :

V. errata

Soit l le trajet optique de la lumière entre la face s argentée de la lame A_1 et chacun des miroirs; si le bras OM parallèle au mouvement de la Terre, le temps que met la lu à aller au miroir M_1 et à revenir sur A_1 est

$$t_1 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \ldots\right). \tag{2-2}$$

Le temps employé pour parcourir le bras OM_2, aller et re est

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right); \tag{3-2}$$

d'où

$$t_1 - t_2 = \frac{l}{c}\frac{v^2}{c^2}. \tag{4-2}$$

Si l'on tourne de 90° la plate-forme de l'appareil, les faisc permutent leurs rôles; la différence des temps est

$$t'_1 - t'_2 = -\frac{l}{c}\frac{v^2}{c^2}. \tag{5-2}$$

Pour obtenir, mesuré en nombre de franges, le déplacem

des franges de part et d'autre de la position qu'elles occuperaient si la Terre était immobile, il suffit de diviser chacune des différences $(t_1 - t_2)$, $(t'_1 - t'_2)$ par la période τ de la lumière employée. Le déplacement total dans la rotation $\frac{\pi}{2}$ est le double de chacun de ces deux déplacements :

$$\varphi = 2\frac{1}{\tau}\frac{l}{c}\frac{v^2}{c^2} = \frac{2l}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}. \tag{6-2}$$

L'expérience, faite par Michelson (1881), a été répétée par Michelson et Morley (1887), puis par Morley et Miller (1904-1905) dans des conditions d'extrême précision : par des réflexions successives, le trajet de la lumière entre la lame et les miroirs avait été porté à 22^{m}. La vitesse de la Terre par rapport au milieu devant, au moins une fois dans le cours de l'année, atteindre ou dépasser 30 km : sec, le déplacement des franges, avec la lumière du sodium, devait à ce moment atteindre ou dépasser $\frac{3}{4}$ de la distance séparant deux franges consécutives.

La précision des mesures était environ du centième de frange.

On n'a jamais obtenu aucun déplacement des franges, à aucune époque de l'année. Tout se passe comme si la Terre était immobile.

Le désaccord entre l'expérience et la théorie est brutal. Nos raisonnements sont cependant exacts, si l'on admet les notions habituelles d'espace et de temps, et les lois ordinaires de la mécanique. Ces lois ne sont donc pas valables pour les phénomènes optiques [1]; il faut renoncer à toute tentative de fonder sur la mécanique classique une théorie des phénomènes optiques et électromagnétiques.

8. La contraction de Fitzgerald-Lorentz.

Fitzgerald et Lorentz ont, indépendamment l'un de l'autre, émis une hypothèse qui rend compte du résultat négatif de l'expérience de Michelson.

[1] D'autres expériences, dans le domaine de l'électromagnétisme, destinées à révéler le mouvement absolu, ont également conduit à des résultats complètement négatifs.

Cette expérience nous apprend que la lumière met le temps à parcourir (aller et retour) les deux bras de l'app quelle que soit l'orientation. Pour égaliser rigoureuseme temps t_1 (2-2) et t_2 (3-2), il suffit de supposer que le dirigé dans la direction de la vitesse v s'est contracté, et q longueur est devenue $l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. L'hypothèse est de suivante :

Pour tous les corps, les dimensions linéaires parallèl mouvement dans l'éther subissent un raccourcissement, d quement à ce mouvement, dans le rapport $\frac{l'}{l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ dimensions perpendiculaires à la vitesse absolue ne sor altérées.

Pour une vitesse de 30 km : sec, la contraction serait très ($5^{\mu\mu}$ par mètre), mais elle deviendrait considérable au grandes vitesses, et pour $v = c$ tous les objets seraient réd deux dimensions. L'observateur ne s'apercevrait jamais de l traction, car tous les instruments de mesure la subiraient, subirait lui-même. Il serait impossible de mettre en évide mouvement absolu.

9. Le point de vue de Lorentz.

Lorentz, dans l'hypothèse de la contraction de la mat cherché à sauvegarder les bases de la mécanique classiqu notion de temps absolu dont elle dérive. La contraction ser contraction réelle produite par le mouvement absolu dans l elle serait la même pour toute matière.

Effectivement, MM. Morley et Miller ont constaté que remplace la dalle en pierre, sur laquelle était fixé l'appar une dalle en bois, le résultat de l'expérience interférenti toujours négatif.

Mais comment admettre que la contraction, si elle est soit la même pour tous les corps, c'est-à-dire soit indépend la substance, quelle que soit la rigidité de celle-ci ? se prod

aussi pour les gaz, et alors où est la limite entre un gaz raréfié et l'espace vide?

Est-il possible d'admettre que la contraction soit une propriété de la matière? ne traduirait-elle pas plutôt une propriété métrique de l'espace dans lequel nous apparaît la matière? La théorie d'Einstein nous donnera la réponse (*voir* plus loin n° 22).

10. Le point de vue d'Einstein. Principe de relativité.

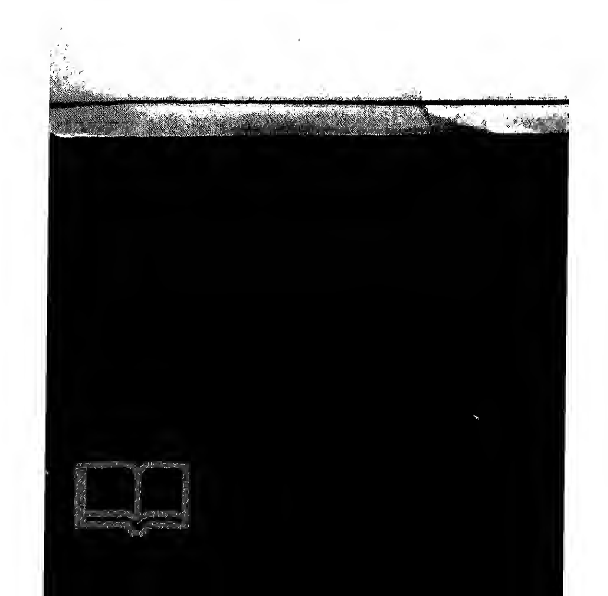
Pour éviter les difficultés qui résultent de l'hypothèse de Lorentz (du moins sous la forme qui précède), pour rendre compte, d'une façon générale, de l'insuccès de toutes les expériences électromagnétiques ou optiques par lesquelles on a cherché à révéler le mouvement absolu, pour exprimer les faits de la façon la plus simple, Einstein a énoncé les principes suivants :

1° *Les lois des phénomènes physiques sont les mêmes dans tous les systèmes en translation uniforme les uns par rapport aux autres.*

Ce principe constitue l'extension aux phénomènes électromagnétiques et optiques du principe de relativité de la mécanique (n° 5).

2° *Pour tous les systèmes en mouvement de translation uniforme (c'est-à-dire dans lesquels ne règne aucun champ de force d'inertie), la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions; cette vitesse ne dépend pas de l'état de mouvement de la source lumineuse.* V. errata

Le mouvement de la Terre sur son orbite peut être considéré, pendant la courte durée d'une expérience, comme rectiligne et uniforme. Deux systèmes de référence liés à la Terre à deux époques de son mouvement annuel constituent deux systèmes en translation uniforme, l'un par rapport à l'autre. A toute époque de l'année, pour l'observateur entraîné avec la Terre, la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions, et, par suite, les franges d'interférence gardent une position invariable quand on fait tourner la plate-forme de l'appareil de Michelson.



CHAPITRE III.

LE GROUPE DE TRANSFORMATIONS DE LORENTZ.

11. Formules de Lorentz.

Le résultat négatif de Michelson, l'échec de toutes les riences tentées pour révéler le mouvement absolu de la tiennent à des causes profondes qui avaient passé inaperçue les débuts de la théorie électromagnétique.

Si l'on effectue, dans les équations fondamentales du électromagnétique (équations de Maxwell, la transformati groupe de Galilée :

$$(1\text{-}3)\quad \begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t, \end{cases} \qquad (2\text{-}3)\quad \begin{cases} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{cases}$$

ces équations ne conservent pas leur forme.

En d'autres termes, *en ce qui concerne les transformati coordonnées d'espace et de temps, les équations de M n'admettent pas le groupe de transformations de la nique.*

C'est là un fait fondamental.

Mais les équations de Maxwell admettent un autre gro transformations que Lorentz a eu le grand mérite de décou

Pour le moment, nous nous bornerons à indiquer le r Considérons, comme au n° 1, un système $S'(x', y', z')$, e vement rectiligne et uniforme par rapport au système S (avec une vitesse v. Ox, $O'x'$ sont en coïncidence et parallè Oy et $O'y'$, Oz et $O'z'$ sont parallèles; la coïncidence des O et O' des coordonnées constitue un événement pris pour

des temps, c'est-à-dire à partir duquel on compte le temps dans chacun des systèmes.

Désignons toujours par c la vitesse de la lumière et posons :

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(abréviation à retenir car elle sera employée dans toute la suite).

Le groupe de Lorentz est le suivant :

$$(3\text{-}3)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\alpha}(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{1}{\alpha}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \end{aligned}\right. \qquad (4\text{-}3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{\alpha}(x' + vt'), \\ y &= y', \\ z &= z'. \\ t &= \frac{1}{\alpha}\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right). \end{aligned}\right.$$

Si les lois de l'électromagnétisme sont exactes dans le système S, elles ne peuvent être exactes dans S' que si les nouvelles coordonnées d'espace et de temps (x', y', z', t') sont liées aux coordonnées (x, y, z, t) du système S par les équations de Lorentz (3-3; 4-3).

Ces équations forment un groupe, car on reconnaît facilement que deux transformations successives de vitesses v et v' équivalent à une transformation unique de même forme, à condition que la vitesse v'' correspondant à cette transformation unique soit liée aux vitesses v et v' par la relation

$$(5\text{-}3)\qquad v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}.$$

Ce n'est plus l'addition des vitesses, comme en mécanique classique. Nous reviendrons bientôt sur cette loi de composition des vitesses.

Le passage de x' à x se faisant en remplaçant v par $-v$, on voit que la vitesse du système S par rapport au système S' est $-v$.

Nous établirons plus tard les substitutions qu'on doit faire pour les grandeurs électriques et magnétiques; pour l'instant, il n'est question que des transformations de longueurs et de temps.

Il est essentiel de remarquer que *les équations de Maxwell*

impliquent que toutes les perturbations électromagnétiques se propagent dans le vide avec la même vitesse c dans toutes les directions et que *cette vitesse reste la même dans la substitution définie par le groupe de Lorentz.*

12. Le temps local de Lorentz.

La différence entre le groupe de Lorentz et celui de Galilée est profonde. Au lieu du temps t du système S, il faut, si les équations du champ électromagnétique doivent conserver leur forme dans le système S′, introduire dans ce système S′ un temps t', fonction non seulement de la vitesse v, mais du lieu *repéré dans le système* $S(xyz)$, puisque le temps t' dépend de l'abscisse x de ce lieu. Le temps t' a été appelé par Lorentz *temps local.*

Lorentz, qui avait obtenu ces formules $\left(\text{au facteur } \alpha \text{ près, car il avait négligé } \frac{v^2}{c^2}\right)$ en cherchant les conditions d'invariance des lois du champ électromagnétique, n'avait pas attribué de *réalité physique* au temps local. L'expression de t' n'avait été considérée que comme une fiction mathématique.

Il appartient à Einstein d'avoir établi que le temps t' est le temps physique du système S′, c'est-à-dire *le temps que marquent des horloges* identiques à celles qui, dans le système S, mesurent le temps t, mais animées de la vitesse v par rapport à S.

CHAPITRE IV.

L'INVARIANCE DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE.

13. La notion de temps. Définition de la simultanéité [1].

Einstein a analysé d'une manière remarquable la notion de temps; cette analyse a été le début de sa théorie.

Pour décrire le mouvement d'un point, on donne les valeurs de ses coordonnées d'espace en fonction d'une quatrième variable, le temps. Pour que les relations mathématiques aient un sens physique, il faut avoir une idée claire de ce qu'on nomme *le temps*.

Nous devons d'abord remarquer que, dans toutes les circonstances où le temps joue un rôle, il s'agit toujours d'événements simultanés. Quand nous disons : le train part à 8 heures, cela signifie : l'indication 8^h des aiguilles de l'horloge et le départ du train sont deux événements simultanés. On pourrait croire que toutes les difficultés inhérentes à la définition du temps disparaissent en remplaçant « le temps » par « la position des aiguilles de l'horloge ». Cette définition convient pour le lieu où se trouve l'horloge, parce que, en ce lieu, la simultanéité d'un événement et d'une position particulière des aiguilles de l'horloge est parfaitement définie; mais on ne peut pas coordonner ainsi des événements qui se passent en des lieux éloignés de l'horloge.

On pourrait s'imaginer que, pour situer dans le temps un événement se produisant en un lieu éloigné, il suffirait de repérer l'heure marquée par l'horloge à l'arrivée d'un signal électromagnétique (ou lumineux) parti du point où s'est produit l'événement et simultané avec cet événement en ce point. Mais on n'arriverait ainsi à aucune définition acceptable, car une pareille coordination des événements dépendrait, dans un même système, du lieu d'observation.

[1] D'après Einstein, *Ann. d. Physik*, t. 17, 1905.

Voici ce qu'on doit faire. Considérons un système S. Au point A se trouvent un observateur et une horloge immobiles : l'observateur A peut situer dans le temps tous les événements qui se produisent dans son voisinage immédiat. En un autre point B, se trouvent aussi un observateur et une horloge identique à l'horloge du point A ; cet observateur B peut, de son côté, coordonner tous les événements qui se produisent autour de lui. Il s'agit maintenant de coordonner les événements qui se passent en A avec ceux qui se passent en B, car, jusqu'à présent, nous avons bien un temps du point A et un temps du point B, mais nous n'avons pas un temps valable à la fois pour A et pour B.

Ce temps commun aux lieux A et B sera défini de la façon suivante :

Puisque, dans un même système, la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions, le temps que met la lumière à aller de A en B est égal au temps qu'elle met à aller de B en A.

Faisons alors partir de A un signal électromagnétique ou lumineux à l'instant t_A (temps marqué par l'horloge du point A) ; ce signal arrive en B à l'instant t_B (temps marqué par l'horloge du point B) et est réfléchi sur un miroir placé en ce point ; il est enfin de retour au point A à l'instant t'_A (temps du point A).

L'horloge du lieu B est synchrone avec celle du lieu A, par définition, si l'on a

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \quad \text{ou} \quad t_B = \frac{t_A + t'_A}{2}.$$

Cette définition du synchronisme ne soulève aucune objection ; elle est valable pour tous les points d'un même système. En effet :

1° Si l'horloge de B est synchrone avec celle de A, l'horloge de A est synchrone avec celle de B ;

2° Si l'horloge de A est synchrone avec l'horloge de B et avec celle d'un troisième point C, les horloges de B et de C sont synchrones entre elles.

Nous savons donc maintenant ce qu'on appelle horloges synchrones dans un même système : on peut dire encore que deux horloges identiques placées en deux points A et B sont synchrones lorsqu'un signal électromagnétique parti de A à l'époque t_A (mar-

quée par l'horloge de A) arrive au point B à une époque t_B (marquée par l'horloge de B), telle que $\frac{\text{distance AB}}{t_B - t_A} = c$, c étant la vitesse de la lumière dans l'espace vide de matière ([1]).

Nous comprenons ce qu'on doit entendre par simultanéité de deux événements qui se produisent en des lieux différents A et B. L'événement E_A au point A et l'événement E_B au point B sont simultanés lorsque les époques simultanées avec ces événements marquées par deux horloges identiques synchrones en A et en B sont les mêmes.

Par les définitions du synchronisme et de la simultanéité, nous avons une définition précise du temps d'un système, définition valable pour tous les points du système. Toutes les horloges du système ayant été rendues synchrones les unes avec les autres, le temps ou l'époque d'un événement dans le système est l'époque simultanée à cet événement marquée par une horloge immobile qui se trouve au point où il se produit, et plus généralement par toutes les horloges immobiles du système, puisqu'elles ont été synchronisées.

Il est essentiel de remarquer que ce procédé de synchronisation des horloges, et que la définition du temps d'un système sont basés sur la constance de la vitesse de la lumière, quelle que soit la direction de propagation.

Il est impossible de synchroniser deux horloges dans deux systèmes en mouvement relatif. Nous allons d'ailleurs voir bientôt que les deux systèmes ont des temps différents.

14. La vitesse de la lumière est une constante universelle.

Le principe de relativité et le principe de l'invariance de ~~la vitesse~~ de ~~la lumière *dans un même système* (n° 10)~~ ont pour conséquence immédiate que *la vitesse de la lumière a la même valeur dans tous les systèmes en translation uniforme les uns par rapport aux autres.*

Considérons deux systèmes S et S' en translation uniforme l'un

---

([1]) Un semblable procédé est pratiquement employé pour la comparaison des heures des observatoires et la détermination des longitudes par la T. S. F.

par rapport à l'autre et dans lesquels ne règne aucun champ de force. Dans chacun de ces systèmes, la vitesse de la lumière a une valeur indépendante de la direction : soient c et c' les valeurs de cette vitesse dans S et dans S'.

Supposons qu'on ait $c' > c$; cela voudrait dire : pour un observateur B du système S' en mouvement par rapport à S, la vitesse de la lumière est plus grande que pour l'observateur A du système S, et ce résultat serait indépendant de la direction et du sens de la vitesse relative v, car, pour A, toutes les directions de l'espace sont équivalentes. Mais alors, comme rien ne distingue le système S du système S', puisque *les lois physiques sont les mêmes dans ces deux systèmes* (principe de relativité), la même conclusion serait valable dans le passage du système S' au système S, car, pour l'observateur B, toutes les directions de l'espace sont équivalentes. On aurait donc aussi $c > c'$; les deux inégalités étant contradictoires, on a $c' = c$ (¹).

Il importe de bien préciser la signification de ce résultat. Nous supposons que, dans divers systèmes en translation uniforme, les observateurs sont munis des mêmes étalons de longueur, c'est-à-dire de règles qui, si on les mettait les unes à côté des autres dans un des systèmes, auraient la même longueur. Nous supposons que les observateurs ont des horloges étalons identiques, c'est-à-dire qu'ils mesurent le temps en prenant comme étalon de temps la période d'un même phénomène, qui ne soit pas déterminé par des conditions spéciales à un système particulier : par exemple, un pendule ne pourra pas servir d'étalon universel, parce que sa période d'oscillation est déterminée par la pesanteur; mais on pourra adopter la période d'une radiation émise par un corps et prendre pour unité de temps, dans tous les systèmes, un même multiple de cette période.

Dans ces conditions, si divers observateurs en mouvement uniforme les uns par rapport aux autres prennent, chacun dans son système, une base et mesurent le temps employé par la lumière à parcourir cette base — par exemple, par la méthode de Fizeau — en divisant le nombre qui mesure la distance par le nombre qui

(¹) Raisonnement de M. MAX PLANCK, *Acht Vorlesungen über theoretische Physik*, 1910, p. 118.

mesure l'intervalle de temps de [illegible]

Nous supposerons [illegible]

[illegible] et [illegible]

établie.

15. Le groupe de Lorentz déduit de l'invariance de la vitesse de la lumière.

Soit un événement noté (x_0, y_0, z_0, t_0) par les observateurs du système S et noté (x'_0, y'_0, z'_0, t'_0) par les observateurs du système S' [illegible] par rapport à S. Nous nous proposons de chercher les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 satisfaisant aux relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
x' - x'_0 &= f_1(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0),\\
y' - y'_0 &= f_2(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0),\\
z' - z'_0 &= f_3(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0),\\
t' - t'_0 &= f_4(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0).
\end{aligned}
$$

Si l'on suppose la combinaison de l'espace et du temps homogène (1) (euclidienne), ces formules de transformation doivent s'appliquer quel que soit l'événement de référence (x_0, y_0, z_0, t_0) ou (x'_0, y'_0, z'_0, t'_0).

Cette hypothèse de l'homogénéité permet de trouver la forme des fonctions. Considérons [illegible] nous aurons

$$
\begin{aligned}
x'_1 - x'_0 &= f_1(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0, t_1 - t_0),\\
x'_2 - x'_0 &= f_1(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0, t_2 - t_0),\\
x'_2 - x'_1 &= f_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, t_2 - t_1),
\end{aligned}
$$

et, par suite :

$$
\begin{aligned}
f_1(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0, t_2 - t_0)
&= f_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, t_2 - t_1)\\
&+ f_1(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0, t_1 - t_0),
\end{aligned}
$$

---

(1) C'est précisément cette hypothèse de l'homogénéité de l'espace-temps qui est à la base de la relativité restreinte ; l'Univers considéré est euclidien. Nous verrons plus tard, dans la théorie de la relativité généralisée, que cet Univers euclidien est l'Univers tangent à l'Univers réel.

équation fonctionnelle qui montre que f_1 est une *fonction linéaire et homogène* de ses arguments. Nous allons chercher les coefficients de ces relations.

Ces coefficients ne peuvent évidemment être fonctions que de la vitesse relative v. De plus, le principe de relativité exige que les formules donnant les x', y', z', t' en fonction des x, y, z, t soient les mêmes que celles donnant x, y, z, t en fonction des x', y', z', t', dans lesquelles v serait simplement remplacé par $-v$.

Adoptons la disposition d'axes précédemment adoptée. Prenons comme premier événement l'émission d'un signal lumineux en O et O' à l'origine des temps, c'est-à-dire à l'instant où les axes des deux systèmes sont en coïncidence.

Au bout du temps t, pour l'observateur du système S, le signal lumineux a atteint la surface de la sphère du système S :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

La vitesse de la lumière étant une constante universelle, pour l'observateur du système S' le signal lumineux est au bout du temps t' sur la sphère du système S' :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0.$$

Si x, y, z, t ; x', y', z', t' sont les coordonnées d'un même appareil qui reçoit le signal lumineux (second événement), on a

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) = 0.$$

Les lois des phénomènes ne devant pas changer quand on passe de S à S', ou réciproquement, on a nécessairement $\lambda = 1$ et

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \tag{1-4}$$

La disposition d'axes que nous avons choisie exige que :

(2-4) quels que soient y et z, on ait à la fois $x' = 0$ et $x = vt$,
(3-4) » x, z et t, » $y' = 0$ et $y = 0$,
(4-4) » x, y et t, » $z' = 0$ et $z = 0$.

Les relations linéaires et homogènes qui donnent les x', y', z', t' en fonction des x, y, z, t contiennent 16 coefficients fonctions de v dont le nombre se réduit avec la disposition d'axes envisagée, car les conditions précédentes montrent que x' est indépendant

de y et z ; y' indépendant de x, z, t ; z' indépendant de x, y, t. De plus, la relation entre y et y' doit être identique à celle entre z et z', car les directions des axes y et z sont arbitraires et peuvent être permutées.

Il ne reste que 7 coefficients :

$$(5\text{-}4)\qquad \begin{cases} x' = mx + nt, \\ y' = ay, \\ z' = az, \\ t' = px + by + dz + qt. \end{cases}$$

Posons $a = \varphi(v)$; la relation entre y et y' ne devant pas dépendre du signe de v, on a $\varphi(v) = \varphi(-v)$; de plus, la réciprocité entre S et S' exige que $y = \varphi(-v)y'$, d'où $\varphi(v)\,\varphi(-v) = 1$ et $a = 1$.

On a donc

$$(6\text{-}4)\qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

D'après (2-4), pour $x = vt$, $x' = 0$, par suite

$$mv + n = 0$$

et l'on a

$$(7\text{-}4)\qquad x' = m(x - vt).$$

En remplaçant dans l'identité (1-4) x', y', z', t' par leurs expressions données par (7-4), (6-4), (5-4), il vient

$$m^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2(px + by + dz + qt)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

On en conclut que

$$(8\text{-}4)\qquad b = d = 0,$$

$$(9\text{-}4)\qquad m^2 = p^2c^2 + 1,$$

$$(10\text{-}4)\qquad m^2v = -c^2pq,$$

$$(11\text{-}4)\qquad m^2v^2 = c^2q^2 - c^2.$$

De (10-4), on tire

$$(12\text{-}4)\qquad p = -\frac{m^2v}{c^2q};$$

portant cette valeur dans (9-4), il vient

$$(13\text{-}4)\qquad q^2 = \frac{m^4v^2}{c^2(m^2-1)}$$

et l'on en déduit, en portant cette valeur dans (11-4),

$$m = \frac{1}{\alpha} \quad \text{en posant} \quad \alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \tag{14-4}$$

(13-4) et (12-4) donnent ensuite

$$q = \frac{1}{\alpha}; \qquad p = -\frac{1}{\alpha}\frac{v}{c^2}. \tag{15-4}$$

Finalement, les formules de transformation sont les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\alpha}(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{1}{\alpha}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{\alpha}(x' + vt'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{1}{\alpha}\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{16-4}$$

Ce sont précisément les formules de Lorentz (n° 11).

16. La mécanique doit être soumise aux lois de l'électromagnétisme.

Nous avons établi que les deux principes énoncés par Einstein :

1° Les lois des phénomènes physiques sont les mêmes dans tous les systèmes en translation uniforme les uns par rapport aux autres ;

2° Dans un même système, la vitesse de la lumière est indépendante de la direction et indépendante du mouvement de la source de lumière,

ont pour conséquence :

1° Que la vitesse de la lumière est une constante universelle ;

2° Que les transformations des coordonnées d'espace et de temps, quand on passe d'un système à un autre, sont les transformations du groupe de Lorentz ; on peut vérifier que ces transformations conservent leur forme aux équations du champ électromagnétique.

Inversement, si l'on cherche, comme l'avait fait Lorentz, les

formules de transformations qui laissent invariantes les équations de l'électromagnétisme, on obtient les formules (16-4) qui impliquent la *constance de la vitesse de la lumière*, et la *relativité du temps*. Nous sommes donc en présence de deux groupes de transformations :

1° Le groupe de Galilée, qui seul laisse invariante la forme des lois de la mécanique *classique*;

2° Le groupe de Lorentz, qui seul laisse invariante la forme des lois de l'électromagnétisme.

Ces deux groupes sont incompatibles : le premier admet un temps universel; le second implique un temps différent d'un système à un autre (4e équation du groupe de Lorentz).

Le désaccord qui s'est manifesté entre la théorie mécanique de l'expérience de Michelson et le résultat expérimental apparaît comme la conséquence d'un conflit entre les lois de la mécanique newtonienne et celles de l'électromagnétisme.

En effet, d'une part en conservant les notions anciennes d'espace et de temps exigées par la mécanique rationnelle, on devait prévoir un déplacement des franges dans l'expérience de Michelson.

D'autre part, on constate que les équations du champ électromagnétique ne conservent pas leur forme quand on leur applique le groupe de transformations de la mécanique, et qu'elles admettent un groupe différent; la découverte de ce groupe est venu montrer que les équations de Maxwell contenaient implicitement l'explication de l'échec de toutes les tentatives faites pour révéler un mouvement absolu. Le résultat de Michelson, en particulier, est évident : si la vitesse de la lumière est constante, ainsi que l'exige le groupe de Lorentz, les franges doivent garder une position invariable.

L'expérience est donc d'accord avec le groupe de Lorentz, qui exprime l'invariance de forme des équations fondamentales de l'électromagnétisme. Cela est d'ailleurs logique et l'on devait s'y attendre : les lois de l'électromagnétisme ont été établies dans un système de référence qui n'est nullement privilégié dans l'Univers; elles s'expriment sous une forme claire et simple, et deviendraient compliquées par une transformation différente de celle du groupe de Lorentz. Il serait déraisonnable de supposer que ces lois simples

sont spéciales à un système de référence lié à la Terre : elles doivent avoir une portée générale, elles doivent être indépendantes du système de référence et, d'ailleurs, la preuve de leur invariance est le fait qu'elles ne se modifient pas dans le cours de l'année, malgré le changement du système de référence, la Terre changeant de direction sur son orbite.

Mais pourquoi ne pas conserver à la fois les lois de la mécanique classique avec le groupe de Galilée, et les lois de l'électromagnétisme avec le groupe de Lorentz ?

Cela est impossible : adopter le temps absolu de la mécanique, c'est renoncer à l'invariance des lois de l'électromagnétisme; adopter le temps relatif de l'électromagnétisme, c'est abandonner la mécanique newtonienne, car il serait absurde de supposer deux temps, l'un absolu, l'autre relatif. Il y a bien incompatibilité radicale.

Il faut choisir, et l'hésitation n'est pas possible, car le choix est imposé par l'expérience. Les lois de l'électromagnétisme sont trop bien vérifiées pour qu'on puisse songer à les abandonner [1]. Quant aux lois de la mécanique, nous n'avons vraiment aucune raison de les considérer comme exactes ; elles paraissent valables dans les phénomènes ordinaires, trop grossiers pour qu'une discordance apparaisse; mais, dès qu'il s'agit de phénomènes comportant une vérification d'une haute précision, le désaccord se révèle (expérience de Michelson).

Il faut donc renoncer à considérer les lois de la mécanique rationnelle comme des lois rigoureuses, et il faut soumettre la mécanique aux lois de l'électromagnétisme, en appliquant à tous les phénomènes les formules de transformation d'espace et de temps exprimées par le groupe de Lorentz [2]. Les lois classiques deviennent alors des approximations, d'ailleurs excellentes dans la plupart des cas; on remarque, en effet, que *si l'on fait* $c = \infty$ *dans les équations de Lorentz, on retrouve le groupe de Galilée.*

On peut se servir de la mécanique classique tant que le carré de

---

(1) Nous verrons plus tard les vérifications expérimentales.

(2) Sous la réserve de la relativité restreinte, c'est-à-dire lorsque l'on considère seulement des systèmes en translation uniforme.

la vitesse des corps (vitesse par rapport à l'observateur) peut être négligé vis-à-vis du carré de la vitesse de la lumière.

On voit par là que le désaccord entre la mécanique classique et l'électromagnétisme n'est qu'un aspect du conflit profond qui a dominé la physique jusqu'à l'époque actuelle, le conflit entre *la théorie des actions à distance instantanées* admise en mécanique céleste jusqu'à la découverte de la loi de la gravitation d'Einstein, et la *théorie de l'action de proche en proche avec vitesse finie*, à laquelle Maxwell a donné son plein développement grâce à l'introduction du courant de déplacement.

Les équations de Maxwell entraînent la négation du temps absolu; impliquant la notion de temps relatif, ces équations interdisent la possibilité d'une relation de cause à effet, quelle qu'elle soit, pouvant se propager avec une vitesse infinie.

En résumé, nous affirmons que « *la seule cinématique ayant un sens expérimental et aussi grâce à laquelle les lois de la Physique prennent une forme simple, indépendante du système de référence, est la cinématique du groupe de Lorentz* » (P. Langevin) [1].

---

[1] *Bulletin de la Société des Électriciens*, n° 84, décembre 1919.

CHAPITRE V.

RELATIVITÉ DE L'ESPACE ET DU TEMPS [1].

17. L'espace et le temps relatifs.

Dans le groupe de Lorentz, le temps n'est plus un invariant; on voit alors disparaître la dissymétrie qui, dans le groupe de Galilée, existait entre l'espace et le temps (n° 3).

Soient x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2 les coordonnées de deux événements dans un premier système de référence S; x'_1, y'_1, z'_1, t'_1; x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 les coordonnées des mêmes événements dans un second système S' animé d'une vitesse v par rapport au premier. Adoptons la disposition d'axes précédemment indiquée (n° 1) et prenons pour origine des temps l'instant où les deux systèmes d'axes sont en coïncidence.

Dans la cinématique ancienne, la distance spaciale des deux événements est relative, puisque $x'_1 - x'_2$ dépend de v :

$$x'_1 - x'_2 = (x_1 - x_2) - v(t_1 - t_2),$$

mais l'intervalle de temps séparant ces événements est indépendant du système de référence

$$t_1 = t'_1, \qquad t_2 = t'_2, \qquad t'_1 - t'_2 = t_1 - t_2$$

puisque le temps est supposé absolu.

Dans la cinématique nouvelle, l'intervalle de temps $(t'_1 - t'_2)$ est fonction de v, tout comme l'intervalle d'espace. Appliquons, en

---

(1) A. EINSTEIN, *Ann. d. Physik*, t. 17, 1905. — P. LANGEVIN, *L'évolution de l'espace et du temps* (*Scientia*, 1911).

effet, les formules de Lorentz

$$(1\text{-}5)\qquad \begin{cases} x'_1 - x'_2 = \dfrac{1}{\alpha}(x_1 - x_2) - \dfrac{1}{\alpha}v(t_1 - t_2), \\ t'_1 - t'_2 = \dfrac{1}{\alpha}(t_1 - t_2) - \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{v}{c^2}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

ou encore, en remplaçant le temps t par le trajet que la lumière peut parcourir pendant ce temps t, c'est-à-dire en prenant pour variables $u = ct$, $u' = ct'$,

$$(2\text{-}5)\qquad \begin{cases} x'_1 - x'_2 = \dfrac{1}{\alpha}(x_1 - x_2) - \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{v}{c}(u_1 - u_2), \\ u'_1 - u'_2 = \dfrac{1}{\alpha}(u_1 - u_2) - \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{v}{c}(x_1 - x_2). \end{cases}$$

La symétrie de ces deux relations est remarquable.

Il résulte immédiatement de l'expression de $t'_1 - t'_2$ (1-5) que la simultanéité de deux événements est relative. *Lorsque deux événements sont simultanés dans un système* ($t_1 - t_2 = 0$), *ils ne sont simultanés dans aucun autre système en mouvement par rapport au premier* ($t'_1 - t'_2 \neq 0$), *à moins qu'ils ne coïncident à la fois dans l'espace et dans le temps* ($x_1 - x_2 = 0$, $t_1 - t_2 = 0$; $x'_1 - x'_2 = 0$, $t'_1 - t'_2 = 0$). Dans ce dernier cas, on dit qu'ils sont en *coïncidence absolue*. Cette coïncidence complète a un sens absolu, ce qu'on comprend aisément, car il peut en résulter un effet sur lequel tous les observateurs seront nécessairement d'accord (par exemple, rupture de deux objets par choc mutuel).

La relativité complète de l'espace que perçoit chaque observateur entraîne la suppression de la notion de système fixe et de mouvement absolu. L'éther, du moins celui de la théorie de Fresnel, doué de propriétés élastiques et mécaniques, doit être supprimé : nous verrons, dans la relativité généralisée, par quelle conception l'ancien éther peut être remplacé.

18. Loi de composition des vitesses.

Un mobile est animé d'une vitesse v' *mesurée par un observateur du système* S' :

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}; \qquad v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}; \qquad v'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}.$$

Quelle est la vitesse v'' de ce mobile *pour un observateur du système* S?

Nous adoptons toujours la même disposition d'axes; v est la vitesse (parallèle à Ox et à $O'x'$) du système S' par rapport au système S.

Dans la cinématique du groupe de Galilée, la réponse est immédiate (n° 4); on a

$$v''_x = v + v'_{x'}, \qquad v''_y = v'_{y'}, \qquad v''_z = v'_{z'}.$$

La cinématique du groupe de Lorentz conduit à une loi bien différente (déjà mentionnée au n° 11). Différentions les équations de Lorentz :

$$dx = \frac{1}{\alpha}(dx' + v\,dt'), \qquad dy = dy', \qquad dz = dz', \qquad dt = \frac{1}{\alpha}\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right).$$

Il suffit de diviser les trois premières équations par la dernière pour avoir le résultat :

$$(3\text{-}5)\qquad \begin{cases} v''_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{v + v'_{x'}}{1 + \dfrac{vv'_{x'}}{c^2}}; \\[2ex] v''_y = \dfrac{dy}{dt} = \alpha\dfrac{v'_{y'}}{1 + \dfrac{vv'_{x'}}{c^2}}; \\[2ex] v''_z = \dfrac{dz}{dt} = \alpha\dfrac{v'_{z'}}{1 + \dfrac{vv'_{x'}}{c^2}}. \end{cases}$$

En particulier, si v' est parallèle à v, on a

$$(4\text{-}5)\qquad v'' = \frac{v + v'}{1 + \dfrac{vv'}{c^2}}.$$

Ainsi, deux vitesses *mesurées dans des systèmes différents* ne se composent pas suivant la règle du parallélogramme, mais il importe de remarquer que deux vitesses mesurées dans le même système se composent toujours suivant la règle habituelle.

On voit, par l'équation (4-5), que la vitesse v'' est toujours au plus égale à c, et elle n'atteint c que si l'une au moins des vitesses v ou v' est égale à c. Un mobile, par accroissements successifs de vitesse à partir de sa vitesse primitivement acquise,

n'atteint jamais la vitesse de la lumière. LA VITESSE DE LA LUMIÈRE EST UNE VITESSE LIMITE QUI NE PEUT ÊTRE DÉPASSÉE.

Comme exemple, supposons un observateur A et deux observateurs B et C s'éloignant de A, dans des directions opposées, avec la vitesse, mesurée par A, de 200 000 km : sec. Pour l'observateur A, les observateurs B et C s'éloignent l'un de l'autre de 400 000 km par sec, mais pour chacun des observateurs B et C, la vitesse de l'autre est seulement 277 000 km : sec.

Robb a remarqué que la loi d'addition pour le mouvement dans une dimension peut être rétablie si l'on mesure le mouvement, non plus par la *vitesse* v, mais par la *rapidité* $r = \text{th}^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)$.

La loi (4-5) s'écrit, en effet,

$$r'' = r + r'.$$

Comme $\text{th}^{-1}\, 1 = \infty$, la *rapidité* de la lumière est infinie.

19. Explication de l'expérience de Fizeau dite « entraînement des ondes lumineuses ».

Il suffit d'écrire la loi de composition des vitesses (4-5). Le courant d'eau (système S') coule relativement à l'observateur (système S) avec la vitesse v. Le rayon lumineux se propage dans l'eau (système S') avec la vitesse $v' = \frac{c}{n}$; la vitesse v'' de ce rayon mesurée par l'observateur (système S), est donc

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} = \frac{1 + \frac{v}{cn}}{v + \frac{c}{n}} = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

en limitant le développement aux termes du premier ordre. C'est bien le résultat vérifié par Fizeau.

La loi d'entraînement s'explique donc immédiatement, de la façon la plus simple, par la cinématique nouvelle.

CHAPITRE VI.

L'UNIVERS DE MINKOWSKI.

> « A l'heure actuelle, l'espace et le temps considérés en eux-mêmes doivent disparaître ~~dans l'ombre~~ et seule leur union peut posséder une individualité.
>
> » H. MINKOWSKI. »
>
> [*Raum und Zeit* (1), 1908.]

20. L'invariant « intervalle d'Univers ». Union de l'espace et du temps.

Considérons deux événements quelconques. Lorsqu'on les repère dans des systèmes différents (en translation uniforme), ni la distance spaciale l des points où se produisent ces événements, ni l'intervalle de temps T qui les sépare ne sont les mêmes, car chaque système possède son espace propre et son temps, mais la quantité

$$s^2 = c^2 T^2 - l^2 \tag{1-6}$$

a la même valeur dans tous les systèmes, ainsi qu'on le vérifie aisément en appliquant les formules de Lorentz.

D'ailleurs nous avons vu (n° 15) que si la quantité

$$c^2 T^2 - l^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

est nulle dans un système, elle est nulle dans tous les autres, parce que la vitesse de la lumière est un invariant. Pour qu'une valeur nulle de cette quantité entraîne nécessairement une valeur nulle dans un autre système quelconque, il faut et il suffit que les formules de transformation (formules de Lorentz) possèdent la propriété de laisser invariante la quantité $s^2 = c^2 T^2 - l^2$, quelle que soit sa valeur.

(1) Conférence publiée dans le Recueil LORENTZ-EINSTEIN-MINKOWSKI, *Das relativitätsprinzip* (Teubner, éditeur).

L'INVARIANT s EST L'INTERVALLE D'UNIVERS, il remplace la distance de deux points, considérée en géométrie.

Nous avons vu, en effet, que dans les anciennes notions d'espace et de temps, la distance de deux *événements simultanés* est un invariant. En géométrie, où l'on ne considère que des événements simultanés, cet invariant est la distance de deux points.

La condition d'invariance de la distance, quand on passe d'un système de coordonnées à un autre, définit complètement, comme nous l'avons déjà fait remarquer, les formules de transformation de la Géométrie analytique. Mais la conception ancienne ne peut plus être conservée, puisque la simultanéité est purement relative.

Dans la théorie nouvelle, la condition d'invariance de l'intervalle s définit aussi les formules de transformation, et ces formules sont celles de Lorentz.

La réalité objective de l'espace était affirmée autrefois par l'invariance de la distance de deux points en Géométrie. La réalité du temps était affirmée par l'invariance du temps. Ces invariants (distance géométrique et temps) doivent être supprimés et remplacés par l'invariant $s^2 = c^2T^2 - l^2$.

Il n'y a donc ni espace absolu, ni temps absolu, mais il y a une réalité unique, affirmée par l'invariant s. La modification est radicale : *le nouvel invariant contient à la fois les trois coordonnées d'espace et la coordonnée de temps. L'espace et le temps, unis par cet invariant, ne sont pas indépendants et leur union seule possède une individualité. L'Espace-Temps ou Univers est l'ensemble des événements; il est quadridimensionnel* ([1]).

L'Univers est indépendant du système de référence qui sert à repérer les événements : c'est cette indépendance qui est exprimée dans l'énoncé du principe de relativité. Les lois de l'Univers quadridimensionnel, qui sont les mêmes dans tous les systèmes, doivent pouvoir s'énoncer sous une forme intrinsèque, comme le fait la Géométrie pour l'espace, grâce à l'introduction d'éléments invariants. Nous verrons comment cette idée a guidé Einstein,

([1]) L'union de l'espace et du temps a été exprimée pour la première fois par Minkowski, d'où le nom d'Univers de Minkowski.

l'a conduit à la relativité généralisée et à la découverte de la loi de la gravitation.

Que devient alors l'espace? L'espace reste toujours l'ensemble des événements simultanés; c'est une « *coupe de l'Univers à temps donné* » (P. Langevin). Cette définition s'applique à l'ancienne conception de l'espace et à celle d'aujourd'hui, mais la différence est profonde : la conception compatible avec la mécanique newtonienne admettait un temps universel, et la coupe était la même dans tous les systèmes, la forme des corps était la même pour tous les observateurs. Dans l'Univers de Minkowski, la simultanéité étant relative, la coupe à temps donné dépend du système de référence; *la forme des corps n'est plus invariable, il y a une infinité d'espaces euclidiens dans l'Univers « euclidien » unique à quatre dimensions*, comme en Géométrie il y a une infinité de plans dans l'espace euclidien à trois dimensions.

21. Propriétés des couples d'événements [P. Langevin (1)].

Soient A et B deux événements; trois cas peuvent se présenter : l'intervalle s est imaginaire, nul ou réel.

1° *Couples dans l'espace.* — Supposons s imaginaire. Quel que soit le système de référence, $s^2 = c^2T^2 - l^2$ est négatif; la distance spaciale l est plus grande que le trajet cT que parcourt la lumière dans l'intervalle de temps T qui sépare les événements, et cela est vrai dans tous les systèmes, parce que s^2 est un invariant. Deux tels événements n'ont pas, dans le temps, un ordre de succession déterminé, car *leur ordre de succession peut être inversé par un changement convenable du système de référence.*

Repérons, en effet, les deux événements dans deux systèmes S et S' dont les axes des x passent par les deux événements; donnons à S' une vitesse v par rapport à S. Soient x_1, x_2 les coordonnées des deux événements dans S; t_1, t_2 leurs époques dans S; t'_1, t'_2

(1) *L'évolution de l'espace et du temps* (*Scientia*, 1911); *Le temps, l'espace et la causalité* (*Bulletin de la Société de Philosophie*, 19 octobre 1911).

leurs époques dans S'. Les formules de Lorentz donnent

$$(2\text{-}6) \qquad t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\alpha}(t_2 - t_1) - \frac{1}{\alpha}\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1).$$

Nous avons d'autre part, puisque $s^2 < 0$,

$$(t_2 - t_1)^2 < \frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2},$$

ce que nous pouvons écrire

$$(3\text{-}6) \qquad (t_2 - t_1)^2 = \frac{w^2}{c^2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2},$$

w étant une certaine vitesse comprise entre o et c.

Supposons que A soit antérieur à B dans le système S, c'est-à-dire supposons qu'on ait $t_2 - t_1 > 0$; pour toutes les vitesses v dont la valeur absolue est comprise entre w et c (vitesses possibles, puisque $w < c$), vitesses que nous prendrons positives ou négatives selon que la différence $x_2 = x_1$ est positive ou négative, nous aurons

$$t_2 - t_1 < \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$$

et, par suite, d'après (2-6),

$$t'_2 - t'_1 < 0;$$

l'événement A, antérieur à B dans le système S, lui est donc postérieur dans le système S'.

Dans le système animé par rapport à S de la vitesse $v = w$, définie par (3-6), les deux événements sont simultanés.

La distance spaciale de ces deux événements est minimum dans le système pour lequel ils sont simultanés, car $c^2T^2 - l^2$ étant constant, l est minimum pour $T = 0$.

Deux tels événements, qui, par un choix convenable du système de référence, peuvent être amenés en coïncidence dans le temps, mais non dans l'espace, forment un *couple dans l'espace*.

Deux événements qui constituent un couple dans l'espace sont nécessairement sans influence mutuelle. Aucun lien de cause à effet ne peut exister entre eux; en effet, s'il existait entre eux un lien de causalité, comme leur ordre de succession peut être inversé, la cause serait, pour certains observateurs, postérieure à

l'effet, ce qui est absurde : comme dit Einstein, « on ne peut pas télégraphier dans le passé ».

2° *Coïncidence absolue.* — Lorsque $s = 0$, si l et T sont nuls dans un système, ils sont nuls aussi dans tous les systèmes; les deux événements sont en *coïncidence absolue* dans l'Espace-Temps (n° 17).

3° *Couples dans le temps.* — Lorsque s est réel, la distance spaciale l est dans tous les systèmes plus courte que le trajet cT de la lumière pendant la durée qui s'écoule entre les deux événements.

On voit immédiatement, d'après (2-6), que lorsque $s^2 > 0$, $(t'_2 - t'_1)$ est toujours du même signe que $t_2 - t_1$, quelque choix qu'on fasse du système S'. *L'ordre de succession a alors un sens absolu.*

De même que dans le cas où $s^2 < 0$, on peut trouver un système dans lequel $T = 0$; de même lorsque $s^2 > 0$, on peut trouver un système dans lequel l s'annule. Ainsi, lorsque deux événements sont tels que $s^2 > 0$, ils peuvent être amenés en coïncidence dans l'espace, mais non dans le temps : ils forment un *couple dans le temps.* De plus, *la durée qui les sépare est minimum dans le système pour lequel ils coïncident dans l'espace.*

Deux événements qui constituent un couple dans le temps peuvent être unis par un lien de causalité. Ils peuvent aussi, bien entendu, être indépendants, mais toujours le premier événement peut avoir été annoncé au lieu où le second va se produire.

L'intervalle d'Univers s est donc réel ou imaginaire, suivant que l'un des événements peut ou non influer sur l'autre; il indique la « possibilité d'influence ou d'action » d'un des événements sur l'autre (P. Langevin).

22. La contraction des longueurs.

Appliquons les considérations qui précèdent à une tige de longueur l' pour un observateur immobile par rapport à elle dans le système S', et de longueur l pour un observateur du système S par rapport auquel elle se déplace dans le sens de sa longueur.

Prenons comme événements A et B les positions des extrémités

de la tige à un même instant pour l'observateur S ; ces événements forment un couple dans l'espace. Pour l'observateur S, la distance spaciale des événements A et B est la longueur l de la tige, mais, pour l'observateur de S', A et B ne sont plus simultanés, et, pour cet observateur, la tige est plus longue.

Supposons qu'une des extrémités coïncide avec O et O' à l'origine des temps, la formule

$$x' = \frac{1}{\alpha}(x - vt)$$

montre que, pour $t = 0$,

$$x' = \frac{x}{\alpha} \qquad \text{ou} \qquad l = \alpha l'. \tag{4-6}$$

Ainsi, pour l'observateur S qui voit passer la tige, celle-ci est plus courte que pour l'observateur S', pour qui la tige est immobile : quand la tige est animée par rapport à l'observateur d'une vitesse v, sa longueur est la longueur au repos multipliée par $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

C'est la contraction de Lorentz, mais cette contraction n'a plus aucun caractère absolu, et, sous cette forme, elle ne prête plus aux objections précédemment indiquées (n° 9). En somme, la contraction résulte simplement de la manière différente dont les deux observateurs définissent la simultanéité et du fait que la forme d'un corps en mouvement ne peut être définie que comme le lieu des positions simultanées des différents points de ce corps (P. Langevin).

Bien entendu, la contraction est réciproque : si deux tiges identiques sont immobiles, l'une dans le système S, l'autre dans le système S', chaque observateur trouve que la tige de l'autre système est plus courte que celle de son système.

Le fait qu'un objet en mouvement est contracté dans le sens du mouvement ne signifie donc pas que l'objet a été réellement modifié par le mouvement; il signifie que l'espace relatif à l'observateur et l'espace relatif à l'objet ne sont pas les mêmes (ainsi que nous l'avions fait pressentir au n° 9).

Un objet qui passerait avec la vitesse de la lumière serait, pour l'observateur, infiniment aplati.

23. La dilatation du temps (Einstein).

Une horloge est immobile dans le système S′; elle marque le temps t'. Comment marche-t-elle, vue du système S ?

Supposant, comme précédemment, que, dans chacun des systèmes, le temps soit compté à partir de la coïncidence des origines O et O′ des coordonnées, nous avons

$$t' = \frac{1}{\alpha}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),$$

$$dt' = \frac{1}{\alpha}\left(dt - \frac{v\,dx}{c^2}\right), \qquad dx = v\,dt;$$

d'où

$$(5\text{-}6) \qquad dt = \frac{1}{\alpha}\,dt'.$$

En particulier, pour l'horloge du système S′ placée à l'origine O′ des coordonnées, $t = \frac{1}{\alpha}t'$.

On peut raisonner encore de la façon suivante. Considérons une horloge du système S′ et deux événements infiniment voisins se produisant sur cette horloge; nous avons

$$\text{invariant } ds^2 = c^2\,dt'^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 \qquad \text{avec} \qquad dx = v\,dt;$$

d'où

$$dt = \frac{1}{\alpha}\,dt'.$$

Ainsi, pour les observateurs du système S, les horloges de S′ retardent, par seconde, de $(1 - \alpha)$ seconde.

Naturellement, la relation entre les temps t et t' est réciproque : pour les observateurs du système S′, ce sont les horloges du système S qui retardent de plus en plus sur celles de S′.

La dilatation du temps est la contre-partie de la contraction des longueurs.

Soit, en effet, une tige infiniment courte dirigée parallèlement à la vitesse, immobile dans le système S′ et de longueur dx' dans ce système; considérons deux événements infiniment voisins concernant cette tige; d'après (4-6) et (5-6), l'observateur du système S mesure

$$dx = \alpha\,dx' \qquad \text{et} \qquad dt = \frac{1}{\alpha}\,dt'.$$

On a donc

$$dx\,dt = dx'\,dt'.$$

Avec des tiges de longueurs au repos, dx', dy', dz' dirigées parallèlement aux axes de coordonnées, formons un parallélépipède rectangle immobile dans S'; soit dt' un intervalle de temps infiniment court marqué par une horloge au centre de ce parallélépipède; comme avec notre choix particulier d'axes, $dy = dy'$ et $dz = dz'$, nous obtenons

$$dx\,dy\,dz\,dt = dx'\,dy'\,dz'\,dt'$$

ou encore, en prenant comme coordonnée de temps la longueur $u = ct$,

$$dx\,dy\,dz\,du = dx'\,dy'\,dz'\,du', \tag{6-6}$$

formule qui exprime *l'invariance de l'élément d'hypervolume* (*quadridimensionnel*) *d'Univers*.

24. Les lignes d'Univers (Minkowski).

Suivons maintenant la succession des événements qui constituent la vie d'une même portion de matière ou d'un même être. Leur ensemble forme dans l'Espace-Temps une « *ligne d'Univers* », comme en Géométrie une succession de points forme une ligne dans l'espace.

Dans l'espace de la Géométrie, l'élément d'arc de courbe s'écrit

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

dans l'Espace-Temps, l'élément d'arc de ligne d'Univers a pour expression l'invariant

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\,dt^2, \tag{7-6}$$

c'est l'intervalle, *indépendant de tout système de référence*, entre deux événements infiniment voisins pris sur la ligne d'Univers considérée. Entre deux événements A et B pris sur cette ligne, la longueur de l'arc de ligne d'Univers est

$$l = \int_A^B ds, \tag{8-6}$$

l'intégrale étant étendue à tous les couples d'événements infiniment voisins qui se succèdent d'une manière continue le long de cette ligne. Cette intégrale a une valeur indépendante du système de référence.

Prenons comme système de référence un système lié à la portion de matière considérée : dans ce système, tous les événements concernant cette portion de matière sont fixes dans l'espace, puisqu'ils occupent la même position par rapport aux axes du système; pris deux à deux, ils constituent des couples dans le temps (nº 21); l'arc de ligne d'Univers qui les sépare est donc réel (1) et *leur ordre de succession ne peut être inversé* : le passé, le présent et l'avenir gardent un ordre immuable pour les événements concernant un même objet ou un même être.

25. Le temps propre (Minkowski).

Dans un système de référence lié à une portion de matière, c'est-à-dire dans un système dont tous les points sont dans le même état de mouvement, d'ailleurs quelconque, que cette portion de matière, la distance spaciale entre deux événements concernant la portion de matière est toujours nulle. On a donc, dans ce système où $dx = dy = dz = 0$,

$$ds = c\,d\tau, \qquad \int_A^B ds = c\int_A^B d\tau, \tag{9-6}$$

$d\tau$ est *l'élément de temps propre* de la portion de matière considérée et de tout le système qui lui est lié. Le temps propre $\int_A^B d\tau$ écoulé *entre deux événements* A *et* B *est le temps que mesurera un observateur, c'est le temps qu'enregistreront les horloges dans ce système.*

Une horloge liée à un mobile (dont le mouvement n'a plus besoin ici d'être soumis à la restriction de la translation uniforme)

(1) C'est la raison pour laquelle nous avons écrit $s^2 = c^2T^2 - l^2$ et non $l^2 - c^2T^2$.

mesure la longueur, divisée par c, de l'arc de ligne d'Univers de ce mobile.

Considérons maintenant un point matériel *libre* M_1; la loi d'inertie de Galilée nous enseigne que ce point est en mouvement rectiligne et uniforme : à cet *état de mouvement* correspond, dans l'Espace-Temps, une *ligne d'Univers* formée par l'ensemble des événements qui représentent les diverses positions successives de ce mobile dans son état de mouvement uniforme, positions qu'on peut repérer dans un système quelconque.

Sur la ligne d'Univers de M_1, choisissons deux événements déterminés A et B : ces deux événements forment un couple dans le temps; leur ordre de succession est le même dans tous les systèmes de référence; nous supposerons, pour fixer les idées, que A soit antérieur à B.

Entre ces événements A et B, nous pouvons imaginer dans l'Espace-Temps une infinité de lignes d'Univers réelles (de même qu'entre deux points de l'espace de la Géométrie ordinaire, on peut tracer une infinité de courbes); prenons l'une quelconque de ces lignes d'Univers : il suffit pour cela de considérer un second mobile M_2, parti de l'événement A, qui, après avoir parcouru, avec une vitesse plus ou moins grande, un trajet spacial plus ou moins long, trajet que nous allons repérer dans un système en translation uniforme lié à M_1, rejoint ce mobile M_1 à l'événement B.

En résumé, nos données sont les suivantes : les deux mobiles M_1 et M_2 sont en coïncidence absolue aux événements A et B; entre ces événements, leurs lignes d'Univers sont différentes; M_1 est supposé en translation uniforme. Enfin, nous repérons les événements dans un système S lié à M_1.

Il importe de remarquer que M_2, ayant quitté en A le système uniforme S pour y revenir en B (ou seulement pour y passer en B), a nécessairement subi une accélération entre les événements A et B.

Prenons deux époques t et $t+dt$ du temps du système S, comprises entre les époques t_A et t_B auxquelles se produisent, toujours dans le système S lié à M_1, les événements A et B. Aux époques t et $t+dt$, le second mobile M_2 est repéré x, y, z, t; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $t+dt$ dans le système S; ces coordonnées

déterminent, sur la ligne d'Univers de M_2, deux événements C et D infiniment voisins, dont l'intervalle est ds; on a

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\,dt^2,$$

mais on a aussi

$$ds = c\,d\tau,$$

$d\tau$ étant l'élément de temps propre du mobile M_2. On déduit de là

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 = c^2\,dt^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}$$
$$= c^2\,dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha^2 c^2\,dt^2,$$

v étant la vitesse du mobile M_2 à l'époque t, vitesse et temps mesurés dans le système uniforme du mobile M_1.

On a donc finalement

$$d\tau = \alpha\,dt, \tag{10-6}$$

ce qui signifie : *le temps propre d'un mobile* M_2 *entre deux événements de sa ligne d'Univers est plus court que le temps mesuré entre les mêmes événements dans un système en translation uniforme; il est d'autant plus court que la vitesse du mobile par rapport au système uniforme est plus grande.*

Ce résultat est d'ailleurs absolument général, quel que soit le système uniforme considéré, et il pouvait se déduire de la propriété de minimum démontrée au n° **21** : lorsque deux événements forment un couple dans le temps, la durée qui les sépare est minimum dans le système pour lequel ils sont en coïncidence dans l'espace; le temps propre jouit donc de la propriété de minimum par rapport au temps évalué dans tout système en translation uniforme.

Nous n'avons pas encore tenu compte de la coïncidence absolue des mobiles M_1 (en translation uniforme) et M_2 (mouvement quelconque) aux événements A et B. Intégrons (10-6)

$$\int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \alpha\,dt, \tag{11-6}$$

plus le mouvement du mobile M_2 *entre les événements* A *et* B *communs aux deux mobiles différera d'un mouvement recti-*

ligne et uniforme, plus, par conséquent, les vitesses par rapport à M_1 seront grandes, puisque la durée totale $t_B - t_A$ est fixe, et *plus le temps propre total sera court.*

En d'autres termes : *entre deux événements déterminés, la plus* LONGUE *ligne d'Univers est celle qui correspond au mouvement de translation uniforme* (¹).

Si, entre deux événements formant un couple dans le temps, il y a une ligne d'Univers de longueur maximum, celle qui représente la translation uniforme, par contre, il y a une infinité de lignes d'Univers de longueur nulle. En effet, dans le système S lié à M_1, les événements A et B se produisent au même point d'espace : il y a une infinité de trajectoires possibles pour un rayon lumineux partant de ce point à l'époque t_A et y revenant à l'époque t_B après diverses réflexions; or la ligne d'Univers d'un rayon lumineux est de longueur nulle, puisque

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{c^2}{c^2}\right) = 0.$$

D'étranges conséquences se déduisent des résultats qui viennent d'être établis.

1° Dans un système en translation uniforme — la Terre, par exemple, car son accélération est faible — deux horloges identiques et synchrones sont au même endroit. On déplace l'une très rapidement et on la ramène près de l'autre au bout du temps t (temps du système); elle se trouve en retard sur l'autre horloge, de $t - \int_0^t \alpha\,dt$; si l'accélération a été instantanée au départ comme à l'arrivée et si la vitesse est restée constante en grandeur, le retard est $t(1-\alpha)$.

2° Dans les mêmes conditions, un échantillon de matière radioactive aura moins évolué que celui qui n'a pas été déplacé, qui n'a pas subi d'accélérations (Langevin).

Il reste bien entendu que de semblables phénomènes ne seraient

(¹) Il importe de remarquer que, dans la démonstration précédente, il n'y a pas réciprocité entre les systèmes de référence liés à M_1 et à M_2, parce que M_2 n'est pas en translation uniforme. C'est l'accélération de M_2 qui a créé la dissymétrie : on reconnaît ici le caractère absolu de l'accélération.

déterminent, sur la ligne d'Univers de M_2, deux événements C et D infiniment voisins, dont l'intervalle est ds; on a

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\,dt^2,$$

mais on a aussi

$$ds = c\,d\tau,$$

$d\tau$ étant l'élément de temps propre du mobile M_2. On déduit de là

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 = c^2\,dt^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}$$
$$= c^2\,dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha^2 c^2\,dt^2,$$

v étant la vitesse du mobile M_2 à l'époque t, vitesse et temps mesurés dans le système uniforme du mobile M_1.

On a donc finalement

$$d\tau = \alpha\,dt, \tag{10-6}$$

ce qui signifie : *le temps propre d'un mobile* M_2 *entre deux événements de sa ligne d'Univers est plus court que le temps mesuré entre les mêmes événements dans un système en translation uniforme; il est d'autant plus court que la vitesse du mobile par rapport au système uniforme est plus grande.*

Ce résultat est d'ailleurs absolument général, quel que soit le système uniforme considéré, et il pouvait se déduire de la propriété de minimum démontrée au n° **21** : lorsque deux événements forment un couple dans le temps, la durée qui les sépare est minimum dans le système pour lequel ils sont en coïncidence dans l'espace; le temps propre jouit donc de la propriété de minimum par rapport au temps évalué dans tout système en translation uniforme.

Nous n'avons pas encore tenu compte de la coïncidence absolue des mobiles M_1 (en translation uniforme) et M_2 (mouvement quelconque) aux événements A et B. Intégrons (10-6)

$$\int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \alpha\,dt, \tag{11-6}$$

plus le mouvement du mobile M_2 *entre les événements* A *et* B *communs aux deux mobiles différera d'un mouvement recti-*

ligne et uniforme, plus, par conséquent, les vitesses par rapport à M_1 seront grandes, puisque la durée totale $t_B - t_A$ est fixe, et *plus le temps propre total sera court.*

En d'autres termes : *entre deux événements déterminés, la plus* LONGUE *ligne d'Univers est celle qui correspond au mouvement de translation uniforme* (1).

Si, entre deux événements formant un couple dans le temps, il y a une ligne d'Univers de longueur maximum, celle qui représente la translation uniforme, par contre, il y a une infinité de lignes d'Univers de longueur nulle. En effet, dans le système S lié à M_1, les événements A et B se produisent au même point d'espace : il y a une infinité de trajectoires possibles pour un rayon lumineux partant de ce point à l'époque t_A et y revenant à l'époque t_B après diverses réflexions; or la ligne d'Univers d'un rayon lumineux est de longueur nulle, puisque

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{c^2}{c^2}\right) = 0.$$

D'étranges conséquences se déduisent des résultats qui viennent d'être établis.

1° Dans un système en translation uniforme — la Terre, par exemple, car son accélération est faible — deux horloges identiques et synchrones sont au même endroit. On déplace l'une très rapidement et on la ramène près de l'autre au bout du temps t (temps du système); elle se trouve en retard sur l'autre horloge, de $t - \int_0^t \alpha\,dt$; si l'accélération a été instantanée au départ comme à l'arrivée et si la vitesse est restée constante en grandeur, le retard est $t(1-\alpha)$.

2° Dans les mêmes conditions, un échantillon de matière radioactive aura moins évolué que celui qui n'a pas été déplacé, qui n'a pas subi d'accélérations (Langevin).

Il reste bien entendu que de semblables phénomènes ne seraient

(1) Il importe de remarquer que, dans la démonstration précédente, il n'y a pas réciprocité entre les systèmes de référence liés à M_1 et à M_2, parce que M_2 n'est pas en translation uniforme. C'est l'accélération de M_2 qui a créé la dissymétrie : on reconnaît ici le caractère absolu de l'accélération.

rendus appréciables qu'en réalisant des vitesses colossales. Pour réduire α à $0,9_1$ il faut déjà une vitesse de 133000 km : sec.

3° Avec P. Langevin ([1]), imaginons qu'un observateur ait une machine lui permettant de quitter la Terre et d'atteindre une vitesse fantastique. Supposons, pour fixer les idées, que cette vitesse soit inférieure de $\frac{1}{20000}$ seulement à la vitesse de la lumière. Pendant 1 an, le voyageur s'éloigne de la Terre et il revient au bout de 2 ans; il n'a vieilli que de 2 ans, il a vécu le temps propre de son système, temps d'ailleurs enregistré par ses horloges. Cependant, à son retour, il trouve sur la Terre d'autres générations, et il apprend qu'il est parti depuis 200 ans. Il s'est transporté dans l'avenir, mais sans retour possible dans le passé.

Le calcul montre que si les habitants de la Terre et le voyageur pouvaient se suivre mutuellement par des signaux, la Terre attendrait 2 siècles avant de recevoir le signal envoyé par le voyageur pour annoncer le commencement de son voyage de retour, et que le retour se produirait, pour la Terre, 2 jours seulement plus tard. Tandis que le voyageur aurait vu la Terre s'éloigner et se rapprocher de lui pendant des temps égaux chacun, pour lui, à 1 an, la Terre, prévenue seulement par l'arrivée d'ondes électromagnétiques, aurait vu le voyageur s'éloigner d'elle pendant 2 siècles et revenir pendant un temps 40000 fois plus court.

Les chiffres qui viennent d'être donnés supposent que la vitesse a été atteinte très rapidement, ce qui serait évidemment impossible, même si l'homme disposait d'une énergie suffisante, car la force d'inertie serait telle que le voyageur serait écrasé. Toutefois, cet exemple met admirablement en évidence la relativité du temps.

Pour un mobile qui serait animé de la vitesse de la lumière, le cours du temps serait suspendu.

26. La loi d'inertie ([2]).

Nous venons d'établir que l'intégrale $I = \int_A^B ds$ est maximum

---

([1]) P. LANGEVIN, *L'évolution de l'espace et du temps*.

([2]) P. LANGEVIN, *Bulletin de la Société des Électriciens*, 3 décembre 1919.

pour la ligne d'Univers qui correspond au mouvement rectiligne et uniforme, c'est-à-dire pour un mobile qui se meut conformément à la *loi d'inertie de Galilée.*

Cette loi a donc pour énoncé intrinsèque et simple

$$\delta \int ds = 0. \tag{12-6}$$

Le mouvement rectiligne et uniforme joue, dans l'Univers de Minkowski, le rôle que joue la droite en Géométrie euclidienne, avec cette différence que la ligne d'Univers qui se traduit pour nous par l'état de mouvement rectiligne et uniforme entre deux événements est la ligne la plus longue, alors qu'en Géométrie, la ligne droite entre deux points est la ligne la plus courte; cependant, dans un cas comme dans l'autre, l'énoncé sous forme de *loi d'action stationnaire* (12-6) est le même.

La ligne d'Univers du point matériel libre, dans un Univers *régi par les formules de Lorentz*, peut être appelée *droite d'Univers*, car elle présente une analogie frappante avec la droite de la Géométrie euclidienne : aussi dirons-nous que l'Univers de Minkowski est un Univers *euclidien* [1]. Cet Univers euclidien est caractérisé par le fait qu'on peut imaginer une infinité de systèmes de référence en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres, dans lesquels les équations de Maxwell sont exactes, dans lesquels la propagation de la lumière est isotrope, dans chacun desquels on peut définir un temps, valable pour le système tout entier (n° 13) et susceptible d'une mesure optique, dans lesquels enfin le mouvement du mobile libre est rectiligne et uniforme.

Disons dès maintenant que, dans l'Univers réel, ces conditions ne peuvent être réalisées que *localement;* nous verrons, dans l'exposé de la relativité généralisée, que l'Univers réel n'est pas

[1] Nous conservons la qualification d'*euclidien*, bien que les carrés qui figurent dans l'expression de ds^2 ($ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2$) ne soient pas tous affectés du même signe, si l'on conserve des coordonnées réelles. Dans la géométrie de l'espace euclidien, les carrés ont tous le même signe :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

c'est là la seule différence. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

euclidien dans son ensemble, mais qu'en chaque point-événement on peut considérer un Univers de Minkowski euclidien tangent à l'Univers réel, de même qu'en Géométrie des surfaces courbes on peut, aux alentours de chaque point, remplacer la surface par son plan tangent.

Dans l'Univers réel non euclidien, la loi d'inertie reste $\delta \int ds = 0$; la ligne d'Univers du mobile *libre* est une *géodésique* de l'Espace-Temps, mais cette géodésique n'est plus une « droite d'Univers ».

La ligne d'Univers d'une perturbation électromagnétique est une géodésique de longueur nulle.

27. La géométrie de Minkowski (géométrie des événements).

Poursuivant l'étude de l'Univers euclidien de Minkowski, nous allons montrer comment l'invariant s, qui joue dans l'Espace-Temps le même rôle que la distance dans l'espace de la Géométrie, permet de donner une interprétation géométrique de la transformation de Lorentz (¹).

La géométrie des événements diffère de celle des figures de l'espace, non seulement parce qu'elle est à quatre dimensions, mais parce que les coordonnées d'espace et la coordonnée de temps ne sont pas affectées du même signe dans l'expression du carré de l'intervalle d'Univers : comme nous l'avons déjà fait remarquer (note du numéro précédent), il y a dans l'expression de s^2 un terme positif et trois termes négatifs, alors qu'en géométrie ordinaire, le carré de la distance de deux points est exprimé par la somme de trois carrés : en d'autres termes encore, dans l'espace, la distance est toujours réelle, dans l'Espace-Temps l'intervalle peut être réel ou imaginaire.

Nous prendrons comme quatrième coordonnée la longueur $u = ct$. Dans un hyperespace à quatre dimensions, imaginons quatre axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, Ou,

---

(¹) H. MINKOWSKI, *Raum und Zeit*. — MAX VON LAUE, *Die Relativitäts theorie*, t. I, 1919, p. 66.

constituant un système S; il y a six plans de coordonnées xy, xz, xu, yz, yu, zu sur chacun desquels on peut représenter la projection d'une figure quadridimensionnelle; il y a aussi quatre espaces de coordonnées euclidiens, à trois dimensions, perpendiculaires les uns sur les autres : un seul de ces quatre espaces est celui que nous appelons l'« *espace* » (xyz).

En géométrie ordinaire, tridimensionnelle, si nous portons à partir d'un point origine, dans toutes les directions, la distance unité, nous obtenons une surface sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \qquad (13\text{-}6)$$

Dans l'hyperespace quadridimensionnel, prenons un événement origine O. Nous devons remplacer la distance de la Géométrie par l'intervalle d'Univers s, qui peut être réel ou imaginaire. Les événements tels que le carré de l'intervalle qui les sépare de l'événement origine soit égal à ± 1 sont représentés par les *espaces hyperboliques* (à trois dimensions)

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = \mp 1. \qquad (14\text{-}6)$$

Ces espaces jouent le même rôle que la surface sphérique (13-6) de la géométrie ordinaire.

Figurons dans le plan du papier les axes Ox et Ou; coupons par ce plan $(y = 0,\ z = 0)$ les deux espaces hyperboliques : nous obtenons les deux hyperboles

$$(15\text{-}6)\quad \left\{ \begin{array}{ll} x^2 - u^2 = -1 & \text{hyperbole (1)} \\ x^2 - u^2 = +1 & \text{hyperbole (2)} \end{array} \right\} \text{asymptotes communes } x^2 - u^2 = 0.$$

Considérons maintenant un système S′ de points matériels, ou, selon l'expression de Minkowski, de points substantiels, le mot *substance* étant pris dans un sens très général et signifiant qu'il y a « quelque chose », matière, électricité, énergie. Supposons que les points substantiels soient animés, parallèlement à Ox, d'une vitesse v par rapport au système S; leurs lignes d'Univers sont toutes représentées par des droites faisant avec l'axe Ou l'angle

$$\psi = \text{arc tang}\,\frac{v}{c}.$$

On a, en effet,

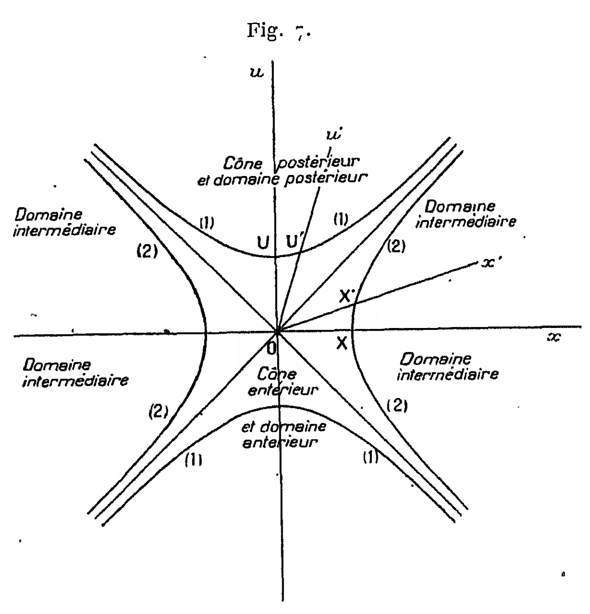
$$(16\text{-}6)\qquad v = \frac{dx}{dt} = c\frac{dx}{du}; \qquad \frac{dx}{du} = \frac{v}{c} = \operatorname{tang}\psi,$$

de sorte que les équations de la ligne d'Univers d'un point substantiel immobile dans le système S′ sont

$$(17\text{-}6)\qquad x = \frac{v}{c}u + x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

Ces lignes sont bien des droites parallèles à la droite Ou' du plan des xu, faisant avec Ou l'angle $\psi = \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{c}$; la droite Ou' est la ligne d'Univers du point substantiel dont la position à l'origine des temps est un événement en coïncidence absolue avec l'événement origine O du système S.

Fig. 7.



La valeur absolue de la vitesse v ne pouvant dépasser c, l'angle ψ est compris entre $\pm\frac{\pi}{4}$.

Prenons maintenant comme nouvel axe du temps la ligne Ou', et comme nouvel axe des x son diamètre conjugué Ox'. Ceci revient à repérer les événements dans le système S′, en mouve-

ment par rapport à S avec la vitesse v parallèle à Ox; en effet, tous les points animés de cette vitesse v apparaissent immobiles si l'on adopte les axes Ox', Ou', puisque leurs lignes d'Univers sont parallèles à l'axe Ou' du temps, et que par conséquent leurs coordonnées d'espace restent constantes.

Dans le nouveau système d'axes (Ox', Oy, Oz, Ou') les équations des hyperboles, qui sont rapportées à deux diamètres conjugués, et celles des espaces hyperboliques restent les mêmes

$$x'^2 - u'^2 = \mp 1, \qquad x'^2 + y^2 + z^2 - u'^2 = \mp 1 \tag{18-6}$$

à condition de changer d'unité de longueur et d'unité de temps, en prenant pour unités OX' sur Ox' et OU' sur Ou', au lieu de OX et de OU.

Transformation de Lorentz. — Nous pouvons maintenant trouver les formules de transformation, permettant de passer du système $Oxyzu$ au système $Ox'yzu'$.

Les droites Ou' et Ox' ont pour équations dans le système S ($Oxyzu$) :

$$Ou' : \quad x = \frac{v}{c}u; \qquad Ox' : \quad u = \frac{v}{c}x.$$

Les coordonnées des points U' et X' d'intersection avec les hyperboles sont, dans le système S :

$$\text{point U'} \begin{cases} u_{U'} = \dfrac{1}{\alpha}, \\ x_{U'} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{v}{c}; \end{cases} \qquad \text{point X'} \begin{cases} u_{X'} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{v}{c}, \\ u_{U'} = \dfrac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

Dans le système S' ($Ox'yzu'$), les coordonnées de ces mêmes points sont les suivantes :

$$\text{point U'} \begin{cases} u'_{U'} = 1, \\ x'_{U'} = 0; \end{cases} \qquad \text{point X'} \begin{cases} u'_{X'} = 0, \\ x'_{X'} = 1. \end{cases}$$

Soient alors

$$x' = ax + bu,$$
$$u' = cx + du$$

les formules de transformation des coordonnées. Il suffit de remplacer x, u, x', u' successivement par les coordonnées des



points U′ et X′ pour avoir quatre relations qui déterminent les coefficients a, b, c, d. On trouve immédiatement

$$a = d = \frac{1}{\alpha}, \qquad b = c = -\frac{1}{\alpha}\frac{v}{c}.$$

Les formules de transformation s'écrivent donc

$$x' = \frac{1}{\alpha}\left(x - \frac{v}{c}u\right) \qquad\qquad x' = \frac{1}{\alpha}(x - vt),$$
$$\text{ou}$$
$$u' = \frac{1}{\alpha}\left(u - \frac{v}{c}x\right) \qquad\qquad t' = \frac{1}{\alpha}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right);$$

ce sont précisément les formules de Lorentz.

La transformation de Lorentz consiste donc dans la substitution de deux diamètres conjugués aux axes des hyperboles et dans le changement d'unités indiqué. Elle laisse invariantes les équations des espaces hyperboliques (18-6).

Toute droite coupant l'hyperbole (1) peut être choisie comme axe du temps $\left(\psi < \frac{\pi}{4}, \frac{v}{c} < 1\right)$. De même toute droite coupant l'hyperbole (2) peut servir d'axe des x, mais non d'axe du temps; tout événement E tel que $u^2 < x^2$ peut ainsi être rendu simultané avec l'événement origine O, en prenant pour axe du temps le diamètre conjugué de OE.

Construction générale. — On peut généraliser les résultats précédents et les étendre au cas où les axes d'espace x, y, z sont orientés arbitrairement par rapport à la vitesse v.

L'espace hyperbolique à deux nappes

$$(19\text{-}6) \qquad (1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -1$$

et l'espace à une nappe

$$(20\text{-}6) \qquad (2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = +1$$

ont un espace conique asymptote

$$(21\text{-}6) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0.$$

Dans l'espace hyperbolique (1), choisissons un point U′ quelconque ($x_{U'}$, $y_{U'}$, $z_{U'}$, $u_{U'}$) et joignons OU′. Nous pouvons prendre

cette droite comme nouvel axe du temps Ou' ; à la droite Ou' correspond un espace diamétral conjugué (euclidien), comme à un diamètre d'un hyperboloïde correspond un plan diamétral conjugué. Cet espace a pour équation

$$x x_{U'} + y y_{U'} + z z_{U'} - u u_{U'} = 0, \tag{22-6}$$

il coupe l'espace hyperbolique (2) à une nappe suivant un ellipsoïde (comme un plan coupe un hyperboloïde suivant une ellipse); l'ellipsoïde est une sphère si U' est un sommet de l'espace hyperbolique (1) (cas du système x, y, z, u).

Nous pouvons toujours prendre pour Ox' l'intersection de l'espace conjugué de Ou' par le plan Ou, Ou', et d'autre part faire tourner le système x, y, z pour amener Ox dans le même plan Ou, Ou'. Nous sommes alors ramenés à la construction précédente, Ox et Ox' étant dans le plan Ou, Ou'.

La vitesse de l'espace conjugué de Ou' par rapport à l'espace x, y, z est $c \tang \psi$, ψ étant l'angle des axes du temps Ou et Ou'.

Il existe une triple infinité de points dans l'espace hyperbolique (1); il y a, par suite, une triple infinité d'axes du temps et une triple infinité d'espaces euclidiens conjugués de ces axes du temps.

Le passé et l'avenir. — L'espace conique

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$$

partage l'Univers en trois domaines :

1° *Le domaine antérieur*, pour lequel $s^2 > 0$ ou $u^2 > x^2 + y^2 + z^2$ avec $u < 0$. Par chaque événement A de ce domaine, on peut faire passer un axe du temps Ou', le sens du temps croissant étant $A \longrightarrow O$. Un événement quelconque de ce domaine est « dans le passé » de l'événement origine O, quel que soit le système de référence; il forme avec O un couple dans le temps, A étant antérieur à l'événement origine, puisque $u < 0$.

2° *Le domaine postérieur* : $s^2 > 0$ ou $u^2 > x^2 + y^2 + z^2$ avec $u > 0$. Par chaque événement A de ce domaine, on peut encore

faire passer un axe du temps; le sens du temps croissant étant $O \longrightarrow A$, l'événement A est « dans l'avenir » de l'événement origine.

3° *Le domaine intermédiaire :* $s^2 < 0$ ou $u^2 < x^2 + y^2 + z^2$. Dans ce domaine, trois événements A, B, C quelconques, c'est-à-dire trois points d'Univers, forment avec O un espace euclidien qui peut être choisi comme *espace* $(Ox'y'z')$; l'axe du temps est alors le diamètre conjugué de cet espace. Dans le système de référence ainsi constitué, les trois événements A, B, C sont simultanés avec l'événement origine O ($t' = 0$ pour A, B, C, O). Par un choix convenable d'un autre système on peut, à volonté, rendre un événement de ce domaine antérieur ou postérieur à O.

En résumé : le cône $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$ se compose de deux parties : le cône antérieur, pour lequel $u < 0$ et le cône postérieur pour lequel $u > 0$. Le premier contient les points d'Univers ou événements dont l'annonce a pu précéder l'événement O; ces points d'Univers peuvent « envoyer de la lumière à O ». Le cône postérieur contient l'ensemble des événements qui peuvent être avertis de l'événement O; ces points d'Univers peuvent « recevoir de la lumière de O ».

En d'autres termes, les événements du cône antérieur peuvent être causes de l'événement O, ceux du cône postérieur peuvent être causés par O.

Dans le domaine intermédiaire, le cours du temps n'a pas de sens absolu; aucun événement de ce domaine ne peut avoir avec l'événement O une relation de cause à effet.

Nous retrouvons, par cette représentation géométrique, les résultats indiqués au n° **21**.

28. L'équivalence du temps et d'une longueur imaginaire (Minkowski).

Posons

$$l = ct\sqrt{-1} = u\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad u = -l\sqrt{-1}. \tag{23-6}$$

Le carré de l'intervalle, changé de signe, séparant l'événement

origine de l'événement x, y, z, t, s'écrit

$$-s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + l^2. \tag{24-6}$$

Nous pouvons prendre l comme quatrième coordonnée; cette coordonnée intervient exactement au même titre que les coordonnées longueurs x, y, z.

Les formules de Lorentz deviennent

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\alpha}\left(x + \sqrt{-1}\,\frac{v}{c}\,l\right), \\ l' &= \frac{1}{\alpha}\left(l - \sqrt{-1}\,\frac{v}{c}\,x\right). \end{aligned}\right. \tag{25-6}$$

Définissons un angle φ tel que

$$\cos\varphi = \frac{1}{\alpha}, \qquad \sin\varphi = \sqrt{-1}\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{v}{c}, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tang}\varphi = \sqrt{-1}\,\frac{v}{c}. \tag{26-6}$$

Cet angle imaginaire φ est lié à l'angle réel ψ de la Géométrie hyperbolique par la relation $\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{-1}\operatorname{tang}\psi$.

Les équations de Lorentz s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + l\sin\varphi, \\ l' &= l\cos\varphi - x\sin\varphi, \end{aligned}\right. \tag{27-6}$$

formules bien connues : ce sont celles qui permettent de passer de deux axes rectangulaires Ox, Ol à deux axes Ox', Ol' faisant un angle φ avec les premiers. La transformation de Lorentz est donc simplement une rotation d'un angle (imaginaire) φ des deux axes Ox et Ol dans le plan xOl.

Avec cette représentation, il est facile d'établir la loi de composition des vitesses.

Soient, en effet, v la vitesse du système S' par rapport au système S, v' la vitesse d'un mobile dans le système S', ces deux vitesses étant parallèles à Ox.

v correspond à une rotation φ, v' correspond à une rotation φ' dans le système S'. Par rapport à S, nous avons à calculer la vitesse v'' qui correspond à la rotation $(\varphi + \varphi')$; nous avons donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{-1}\,\frac{v}{c}, \qquad \operatorname{tang}\varphi' = \sqrt{-1}\,\frac{v'}{c}, \qquad \operatorname{tang}(\varphi + \varphi') = \sqrt{-1}\,\frac{v''}{c};$$

d'où

$$v'' = -\sqrt{-1}\, c \operatorname{tang}(\varphi + \varphi') = -\sqrt{-1}\, c \frac{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi'}{1 - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi'} = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}.$$

La formule de composition des vitesses n'est donc autre chose que la formule qui exprime la tangente de la somme de deux angles.

Plus généralement, si l'on effectue n transformations dans le plan des xl avec les rotations successives $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, il en résulte une rotation unique d'un angle

$$\varphi = \sum_1^n \varphi_k.$$

La vitesse v_n du $n^{\text{ième}}$ système par rapport au système primitif est

$$v_n = -\sqrt{-1}\, c \operatorname{tang}(\Sigma \varphi_k).$$

Or la fonction

$$\operatorname{tang} x = \sqrt{-1}\, \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{\sqrt{-1}x}}{e^{\sqrt{-1}x} + e^{\sqrt{-1}x}}$$

croît de 0 à $\sqrt{-1}$ lorsque l'argument est purement imaginaire et augmente de 0 à $\sqrt{-1}\,\infty$. Par conséquent, $\operatorname{tang}(\Sigma\varphi_k)$ est toujours inférieur ou au plus égal à $\sqrt{-1}$ et $v_n \leqq c$. La vitesse de la lumière est la limite supérieure des vitesses.

L'équation « mystique » de Minkowski [1]. — L'équivalence des longueurs et des temps a été exprimée par Minkowski par une formule qu'il a appelée « formule mystique ». La limite des vitesses c étant prise pour unité naturelle, on a

$$3.10^5 \text{ kilomètres} = \sqrt{-1} \text{ seconde}.$$

Effectivement, une longueur de 300000^{km} et le temps imaginaire $\sqrt{-1}$ seconde jouent exactement le même rôle dans l'expression des lois de l'Univers.

---

[1] H. MINKOWSKI, *Raum und Zeit.*

CHAPITRE VII.

PHÉNOMÈNES OPTIQUES DANS LES SYSTÈMES EN MOUVEMENT RELATIF.

29. L'effet Doppler-Fizeau.

Nous donnerons d'abord la théorie de l'effet Doppler pour les ondes sonores, afin de bien préciser la différence avec le cas des ondes lumineuses.

Ondes sonores. — Lorsque, soit l'observateur, soit la source sonore, soit l'observateur et la source sont en mouvement (par rapport à l'air, milieu de propagation), la hauteur du son perçu est modifiée. Le son entendu est plus aigu si l'observateur et la source s'approchent l'un de l'autre, plus grave s'ils s'éloignent [1].

Il est essentiel de noter que ce n'est pas le mouvement *relatif* de la source et de l'observateur qui détermine le changement de hauteur du son perçu. La vitesse de l'observateur par rapport à l'air et la vitesse de la source interviennent chacune pour son compte, et ces vitesses jouent dans le phénomène des rôles absolument différents.

Les deux figures ci-après font comprendre d'un seul coup d'œil le phénomène ainsi que la différence entre le cas où l'observateur seul est mobile et le cas où la source est en mouvement.

Ces figures représentent, autour de la source A, un train d'ondes émises à des intervalles de temps égaux à la période T_A de la source; ces ondes sont sphériques et deux ondes consécutives ont des rayons qui diffèrent d'une longueur d'onde $\lambda = VT_A$, V étant la vitesse de propagation du son.

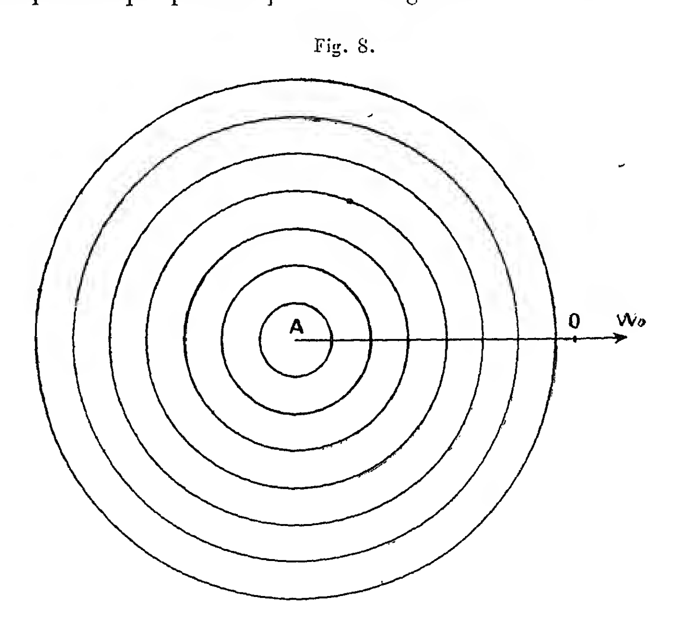
Lorsque la source A est immobile, toutes les sphères sont con-

---

[1] Résultat énoncé par Doppler (1842) et précisé par Fizeau.

centriques; la distance qui sépare deux ondes successives sur une droite quelconque passant par A est égale à λ. La hauteur du son

Fig. 8.



perçu par l'observateur est égale au nombre des ondes qu'il reçoit dans l'unité de temps. Si l'observateur se dirige vers la source, il reçoit un plus grand nombre d'ondes dans l'unité de temps et par conséquent, perçoit un son plus aigu; s'il s'éloigne de la source, il perçoit, au contraire, un son plus grave. *Ce qui est changé, par le fait du mouvement de l'observateur, c'est la vitesse du son relativement à l'observateur;* pour lui, le son a une vitesse $V - w_0$, w_0 étant la vitesse de l'observateur comptée positivement s'il s'éloigne de la source.

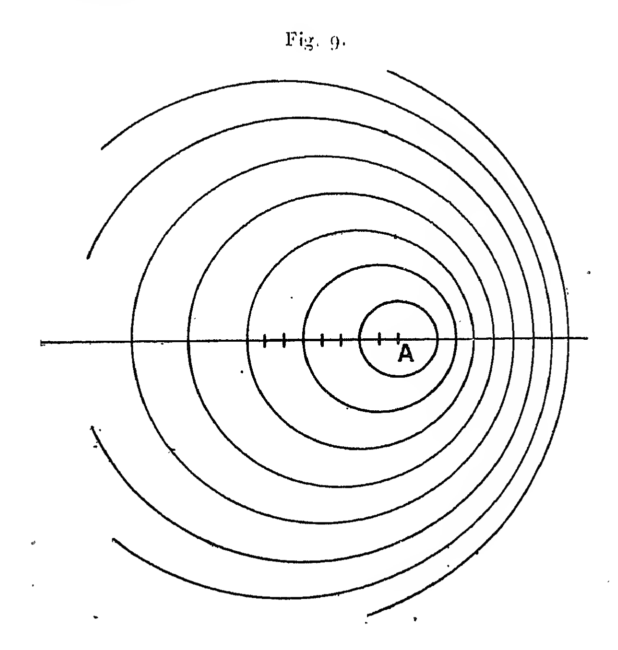
Considérons, d'autre part, une source en mouvement; les sphères ne sont plus concentriques : elles sont plus serrées dans le sens du mouvement, plus écartées dans le sens opposé, la différence des rayons de deux sphères successives étant d'ailleurs toujours égale à λ. *Ce qui est changé, par le fait du mouvement de la source, ce n'est plus la vitesse relative du son, c'est la distance des ondes, c'est la longueur d'onde pour l'observateur.* Dans le sens du mouvement, cette distance λ' des ondes succes-

sives est égale à λ, diminuée du déplacement de la source

$$\lambda' = \lambda - w_A T_A$$

w_A étant la vitesse de la source.

Fig. 9.



Le cas du mouvement de l'observateur et celui du mouvement de la source sont donc, par leur nature même, essentiellement différents.

Nous remarquerons que le maximum d'effet a lieu, dans un cas comme dans l'autre, lorsque le mouvement de l'observateur O et celui de la source A ont lieu suivant la droite OA; suivant une direction normale à OA, si l'observateur et la source sont à une distance assez grande par rapport à λ, l'effet du mouvement est négligeable. Nous ne considérerons donc que les *vitesses radiales;* nous désignerons par w_0 la vitesse radiale de l'observateur (c'est-à-dire la projection de sa vitesse sur la droite OA), et par w_A la vitesse radiale de la source. L'air est supposé immobile.

Comptons les vitesses radiales positivement dans le sens source → observateur. La formule générale qui donne la période T_0 du son perçu par l'observateur s'obtient immédiatement : il suffit

d'écrire que

vitesse relative du son × période du son entendu
= distance de deux ondes successives,

c'est-à-dire

$$(V - w_0)T_0 = \lambda' = \lambda - w_A T_A = (V - w_A)T_A,$$

$$T_0 = T_A \frac{V - w_A}{V - w_0}. \tag{1-7}$$

C'est la formule exacte; mais si les vitesses w_0 et w_A sont petites par rapport à la vitesse du son, on peut écrire en appelant v_r *la vitesse radiale relative* $w_0 - w_A$ de la source et de l'observateur, comptée positivement comme vitesse d'éloignement,

$$T_0 = T_A\left(1 + \frac{v_r}{V}\right). \tag{2-7}$$



Dans cette formule, c'est seulement à titre d'approximation, dans le cas des faibles vitesses, que la vitesse relative v_r intervient seule. Si les vitesses sont comparables à celles du son, la différence entre les deux cas de la source en mouvement et de l'observateur en mouvement devient considérable : par exemple, si l'observateur s'éloignait de la source avec la vitesse $w_0 = V$, il n'entendrait aucun son, tandis que, l'observateur étant immobile, si la source s'éloignait de l'observateur avec la vitesse $w_A = V$, l'observateur, recevant deux fois moins d'ondes par unité de temps, entendrait un son qui serait l'octave grave du son émis.

Ondes électromagnétiques. — Dans le cas des ondes électromagnétiques, il est bien évident que la théorie précédente ne peut pas s'appliquer.

Il n'est plus possible de définir des vitesses w_0, w_A par rapport à un milieu de propagation, seule la vitesse relative v de la source par rapport à l'observateur a une signification et seule cette vitesse doit figurer, non pas seulement dans une formule approximative comme (2-7), mais dans la formule exacte. Pour les ondes sonores, la vitesse du son relativement à l'observateur dépend de la vitesse de l'observateur par rapport à l'air; pour les ondes

électromagnétiques, la vitesse de propagation est toujours la constante c.

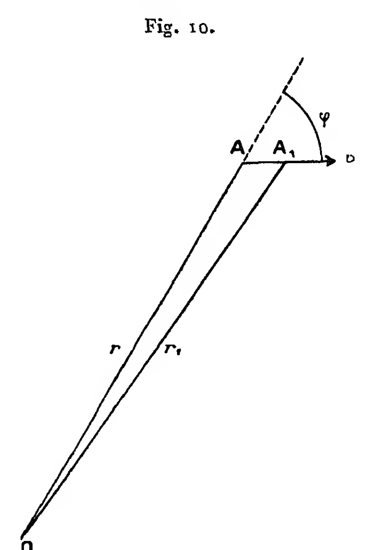
La théorie peut être présentée très simplement de la façon suivante ([1]) :

Soit un observateur O qui reçoit le rayonnement émis par une source A d'ondes électromagnétiques mobile par rapport à lui avec la vitesse v. Dans le système de référence lié à l'observateur, la perturbation émise par A à l'instant t arrive en O à l'instant

$$t + \frac{r}{c} \qquad (r = \text{AO}).$$

Au bout d'une période, *de durée* θ *dans le système lié à* O, la

Fig. 10.



source est venue au point A_1, à une distance $v\theta$ de A, et l'instant d'arrivée en O de la perturbation correspondante est

$$t + \theta + \frac{r_1}{c} \qquad (r_1 = \text{AO}).$$

L'intervalle de temps entre les arrivées en O, ou période appa-

([1]) D'après une Note rédigée par M. Langevin.

rente T_0 pour l'observateur O, est

$$T_0 = \theta + \frac{r_1 - r}{c}.$$

Si la période est assez courte pour que $AA_1 = v\theta$ soit une distance très petite par rapport à la distance $AO = r$, on a, en désignant par φ l'angle de la vitesse de la source et de la direction observateur-source prolongée, ou, ce qui est la même chose, l'angle de la vitesse de l'observateur par rapport à la source et du rayon lumineux, angle mesuré dans le système de l'observateur,

$$r_1 - r = AA_1 \cos\varphi = v\theta \cos\varphi ;$$

d'où

$$T_0 = \theta\left(1 + \frac{v \cos\varphi}{c}\right) = \theta\left(1 + \frac{v_r}{c}\right), \tag{3-7}$$

v_r étant la *vitesse radiale* de la source par rapport à l'observateur, positive si la source s'éloigne, négative si la source se rapproche.

C'est la formule qu'on donnait autrefois : 1° en appliquant la formule approximative de l'acoustique (2-7) ; 2° en considérant θ comme la période de la source.

Dans l'ancienne théorie, on commettait ainsi une double erreur, car : 1° la formule (3-7) est exacte, et non approximative comme en acoustique, en ce qui concerne $\left(1 + \frac{v_r}{c}\right)$, parce que la vitesse de la lumière est une constante ; 2° elle n'est qu'approximative si l'on prend θ comme la période de la source,

Nous savons, en effet, maintenant, que θ n'est pas la période *propre* de la source, c'est-à-dire la durée qui sépare deux phases égales de l'émission *dans un système lié à la source*. Soit T_A la période propre de A, on a

$$T_A = \alpha\theta,$$

car T_A est l'intervalle de *temps propre* entre deux émissions, alors que θ est l'intervalle de temps mesuré dans le système de l'observateur (10-6, n° 25).

La formule exacte de l'effet Doppler est donc la suivante :

$$T_0 = T_A \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{v_r}{c}\right), \tag{4-7}$$

Pour $\varphi = 0$, on a *l'effet Doppler longitudinal*

$$(5\text{-}7) \qquad T_0 = T_A \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{v}{c}\right) = T_A \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}\,;$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $v_r = 0$ et l'on a *l'effet Doppler transversal*, que ne prévoyait pas la théorie ancienne,

$$(6\text{-}7) \qquad T_0 = \frac{1}{\alpha} T_A \qquad (\text{ou } T_0 = 0).$$

L'effet transversal est d'ailleurs simplement l'expression de la dilatation du temps (n° 23). La source A, vue de O, est une horloge qui retarde par rapport à une horloge, constituée par la même source, liée à l'observateur O.

Il reste bien entendu que, dans les applications aux vitesses des astres, les vitesses relatives étant extrêmement petites par rapport à c, α peut être confondu avec l'unité : l'effet transversal est négligeable et la formule pratique est toujours la même que dans l'ancienne théorie.

30. Théorie de l'aberration de la lumière.

Au commencement du siècle dernier, Bradley a découvert que les coordonnées des étoiles varient dans le cours de l'année. Chaque étoile décrit sur la sphère céleste une ellipse dont le grand axe est $20'',5$ et dont le petit axe est $20'',5 \sin\lambda$, λ désignant la latitude céleste (comptée à partir de l'écliptique).

Cet effet ne peut pas être attribué à la parallaxe, c'est-à-dire au diamètre apparent sous lequel, de l'étoile, on verrait l'orbite de la Terre, car la parallaxe donnerait une ellipse dont le grand axe, inversement proportionnel à la distance de l'étoile, n'aurait pas une valeur constante [1]. D'ailleurs, le mouvement de l'étoile se

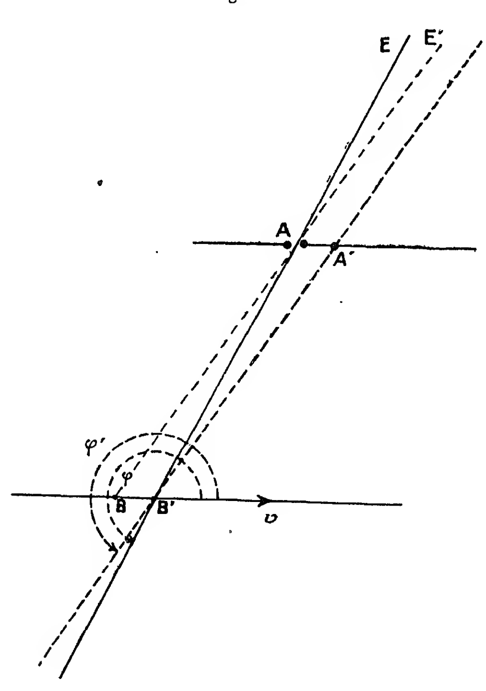
---

[1] Pour les étoiles dont la lumière nous vient en moins d'une trentaine d'années, la parallaxe est appréciable et son effet se superpose à l'aberration de la lumière. Corrigeant les observations de l'effet d'aberration, on calcule la parallaxe et, par suite, la distance à la Terre.

produit à 90° de calui qui résulterait de la parallaxe : le déplacement a sa plus longue élongation lorsque la Terre se meut, sur son orbite, normalement à la direction de l'étoile.

Ancienne théorie. — Supposons que la source E soit immobile, et qu'une ouverture A et un observateur B soient animés d'un même mouvement de translation. Admettons, en outre, que

Fig. 11.



les ondes lumineuses se propagent dans le vide ou dans un milieu tel que l'air, qui ne leur imprime aucun entraînement sensible.

Soient E la source, A la position de l'ouverture, B la position de l'observateur à un instant déterminé. La lumière ira atteindre la trajectoire de l'observateur en un point B′ situé sur le prolongement de EA et y arrivera au bout du temps

$$t = \frac{AB'}{c}.$$

Si l'observateur se trouve en ce moment en B', il perçoit la lumière, mais l'ouverture n'est plus alors en A, car pendant le temps t elle s'est déplacée de $AA' = vt$, v étant la vitesse du mouvement de translation de l'observateur. L'étoile est donc vue dans la direction B' A' ou BA.

Si l'on désigne par φ l'angle de la vitesse de l'observateur et du rayon lumineux venant de l'étoile, par φ' l'angle de la vitesse et du prolongement de la direction apparente de l'étoile, par ε l'angle d'aberration $\varphi - \varphi'$, on a

$$\frac{\sin \varepsilon}{-\sin \varphi'} = \frac{AA'}{AB'} = \frac{v}{c}$$

ou, $\varepsilon = \varphi - \varphi'$ étant très petit,

$$\varepsilon = -\frac{v}{c} \sin \varphi. \tag{7-7}$$

Airy a constaté que l'aberration est la même avec une lunette pleine d'air ou pleine d'eau. On peut déduire de ce fait la formule de Fresnel (n° 19) (entraînement des ondes).

Sans doute le raisonnement qui précède donne pratiquement la valeur de l'aberration, mais il est, au fond, inexact, car il ne tient pas compte de la relativité des longueurs et des angles.

Nouvelle théorie. — Imaginons des observateurs placés sur l'orbite de la Terre, mais ne participant pas au mouvement de la Terre autour du Soleil. Ces observateurs appartiendront à un système S dans lequel la direction de l'étoile E sera fixe, si cette étoile est assez lointaine pour pouvoir être considérée comme infiniment éloignée.

La Terre constitue, à chaque instant, un système S' en mouvement relatif par rapport au système S. Nous allons chercher quelle est la direction de l'étoile pour un observateur entraîné avec la Terre.

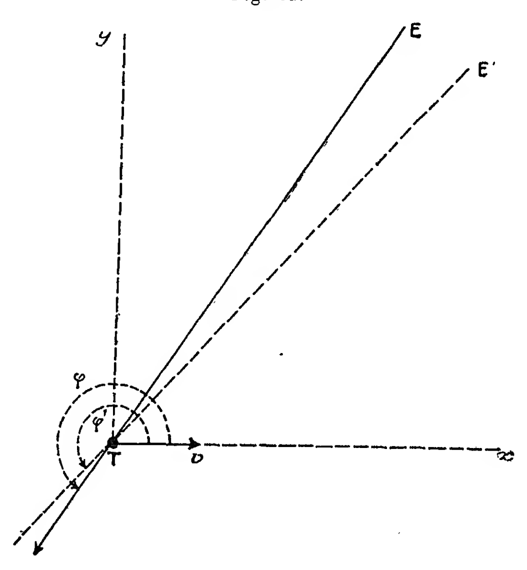
Soit T une position de la Terre sur son orbite; dans le système S, prenons comme axe des x la direction Tx de la vitesse de translation v autour du Soleil, pour plan des xy le plan de la vitesse et de la direction TE de l'étoile E. *Dans le système* S, le départ de E d'une onde lumineuse reçue en T a pour coordon-

nées

$$x = -r\cos\varphi, \qquad y = -r\sin\varphi, \qquad z = 0, \qquad t = -\frac{r}{c},$$

r étant la distance TE de la Terre à l'étoile, φ l'angle de la vitesse v avec le rayon lumineux venant de l'étoile; l'origine du temps est l'instant où l'onde arrive en T.

Fig. 12.



Prenons maintenant comme second système S′ un système animé de la vitesse v par rapport à S, les axes étant en coïncidence avec ceux de S à l'instant $t = t' = 0$, où l'onde est reçue en T. On a, dans ce système S′, qui est celui de l'observateur lié à la Terre,

$$x' = \frac{1}{\alpha}(x - vt) = \frac{r}{\alpha}\left(\frac{v}{c} - \cos\varphi\right), \qquad y' = y = -r\sin\varphi.$$

Pour l'observateur entraîné avec la Terre, l'angle de la vitesse et du rayon reçu est φ', tel que

$$(8\text{-}7) \qquad \operatorname{tang}\varphi' = \frac{y'}{x'} = \frac{\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi - \frac{v}{c}}.$$

En ne conservant que les termes du premier ordre en $\frac{v}{c}$, on

retrouve l'ancienne formule (7-7)

$$\varepsilon = \varphi - \varphi' = + \frac{v}{c} \sin \varphi.$$

L'étoile est donc vue, à chaque instant, dans une direction faisant l'angle $\frac{v}{c} \sin \varphi$ avec la direction TE qu'elle aurait si la Terre n'était pas en mouvement autour du Soleil. Le maximum d'écart est $\frac{v}{c}$ pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire quand la vitesse de la Terre est normale à la direction de l'étoile; le minimum est $\frac{v}{c} \sin \lambda$, λ étant la latitude céleste de l'étoile.

La mesure du grand axe donne 20″,5 ou $\frac{v}{c} = \frac{20,5 . \pi}{180 . 3600}$; on en tire $v = 29{,}8$ km : sec, ce qui est bien la vitesse de la Terre sur son orbite.

31. Effet Doppler, aberration et entraînement des ondes [1].

On peut établir les résultats qui précèdent, sous une forme plus générale qui présente en même temps l'avantage de mettre en évidence la connexité entre les trois phénomènes : effet Doppler, aberration et entraînement des ondes.

Nous supposons toujours la source à grande distance et, par suite, nous considérons un rayonnement par ondes planes périodiques. Si divers observateurs en translation uniforme les uns par rapport aux autres examinent ces ondes, nous pouvons chercher comment varient des uns aux autres : la période (effet Doppler), la direction (aberration) et la vitesse de propagation (entraînement).

Soit une onde L se propageant par rapport au système de référence ($Oxyz$) avec la vitesse normale $c_1 = \frac{c}{n}$ (n indice du milieu par rapport au vide), dans une direction faisant l'angle φ avec l'axe des x et située dans le plan xOy. Si nous choisissons l'origine du temps au moment où l'onde passe par l'origine des coordonnées, l'instant t auquel elle atteindra un point P de coordon-

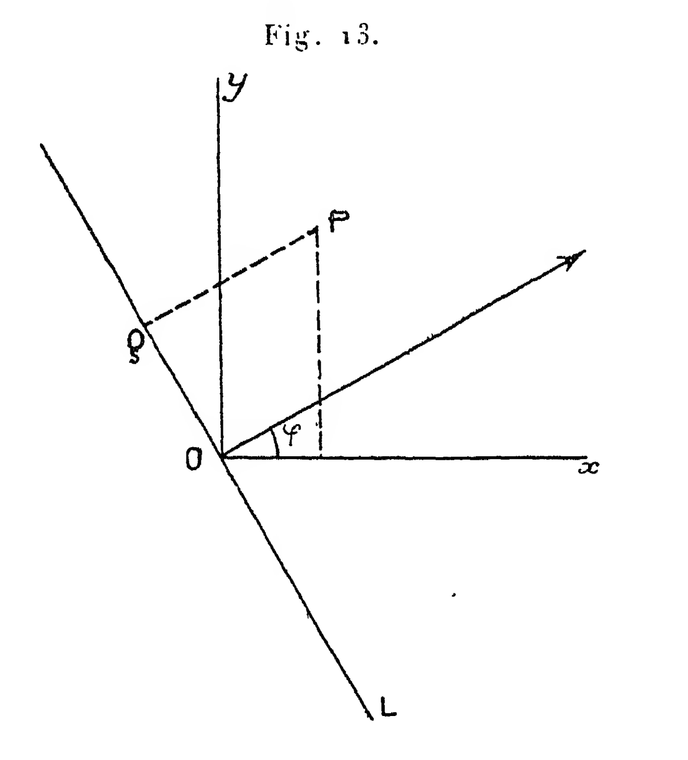
(1) D'après une Note de M. P. Langevin.

nées x, y, z sera évidemment

$$t = \frac{\mathrm{PQ}}{c_1} = \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{c_1}.$$

Si des ondes de même phase se succèdent à intervalle T (période

Fig. 13.



pour les observateurs du système $(\mathrm{O}xyz)$), les instants de passage en P des ondes successives seront

$$(9\text{-}7) \qquad t = \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{c_1} + k\mathrm{T},$$

k désignant les nombres entiers successifs.

Introduisons maintenant un second système de référence $(\mathrm{O}'x'y'z')$ mobile avec la vitesse v dans la direction $\mathrm{O}x$ par rapport au premier, et dont l'origine se trouve en O à l'origine des temps. Les passages des ondes en un point fixe par rapport à O′ seront notés de manière analogue :

$$(10\text{-}7) \qquad t' = \frac{x'\cos\varphi' + y'\sin\varphi'}{c'_1} + k\mathrm{T}'.$$

Il suffit de remplacer dans (9-7) x, y, t en fonction de x', y', t' par les relations du groupe de Lorentz

$$x = \frac{1}{\alpha}(x' + vt'), \qquad y = y', \qquad t = \frac{1}{\alpha}\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right),$$

et d'identifier le résultat avec (10-7) pour obtenir les relations suivantes :

$$\frac{T}{T'} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{v\cos\varphi}{c_1}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{nv\cos\varphi}{c}\right), \tag{11-7}$$

$$\frac{\cos\varphi'}{c'_1} = \frac{\dfrac{\cos\varphi}{c_1} - \dfrac{v}{c^2}}{1 - \dfrac{v\cos\varphi}{c_1}}, \tag{12-7}$$

$$\frac{\sin\varphi'}{c'_1} = \frac{\alpha\sin\varphi}{c_1\left(1 - \dfrac{v}{c_1}\cos\varphi\right)}. \tag{13-7}$$

La formule (11-7) exprime l'effet Doppler. Si l'on prend pour système $Oxyz$ un système lié à la source, pour système $O'x'y'z$, un système lié à l'observateur, et si l'on fait $n = 1$, on retrouve le résultat précédemment établi. La formule (11-7) devient

$$T' = T\alpha\frac{1}{1 - \dfrac{v\cos\varphi}{c}}. \tag{14-7}$$

Ce n'est qu'en apparence qu'elle diffère de (3-7) ou (4-7) : l'angle qui figure dans (3-7) est mesuré dans le système de l'observateur, alors que celui qui figure dans (14-7) est mesuré dans le système de la source. Introduisons l'angle φ' du système de l'observateur; la formule (12-7) donne, pour $n = 1$,

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \dfrac{v}{c}}{1 - \dfrac{v\cos\varphi}{c}} \tag{15-7}$$

et

$$\cos\varphi = \frac{\cos\varphi' + \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{v\cos\varphi'}{c}}. \tag{16-7}$$

Remplaçant $\cos\varphi$ par sa valeur en fonction de φ', la formule (14-7) s'écrit

$$T' = T\frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{v\cos\varphi'}{c}\right) = T\frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{v_r}{c}\right),$$

C'est bien la formule précédemment établie.

Les formules (12-7) et (13-7) expriment à la fois l'entraînement des ondes et l'aberration de la lumière. Divisant (13-7) par (12-7), nous obtenons la formule

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\alpha \sin\varphi}{\cos\varphi - \frac{v}{c}\frac{1}{n}}, \tag{17-7}$$

qui, pour $n = 1$, redonne la formule (8-7).

Dans (12-7), faisons $\varphi = \varphi' = \pi$ ou 0, nous avons

$$c'_1 = \frac{c_1 \pm v}{1 \pm \frac{c_1 v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{v}{c}\frac{1}{n}} = \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \ldots.$$

C'est bien la formule d'entraînement (n° 19), telle qu'elle résulte de la loi de composition des vitesses

32. La rotation mise en évidence par un effet optique. Expérience de Sagnac [1].

Sur les bords d'un disque plan sont disposés, tangentiellement au disque en M_1, M_2, M_3, trois miroirs plans. Les points M_1, M_2, M_3 forment trois sommets d'un carré dont le quatrième sommet est P; en ce point P est placée, normalement à la circonférence du disque, une lame semi-réfléchissante.

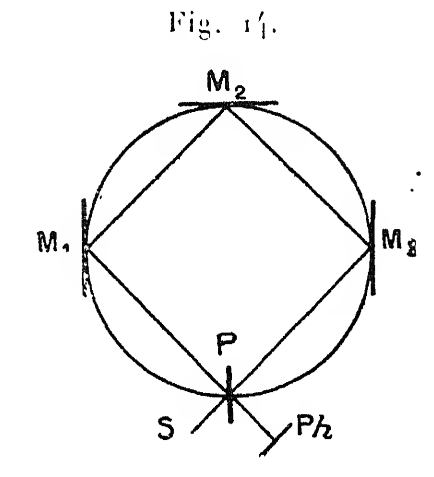
Un faisceau lumineux issu d'une source S tombe sur la lame P sous l'incidence de 45° et est partagé par cette lame en deux rayons, l'un réfléchi, l'autre transmis. Après réflexions successives sur les trois miroirs, chacun de ces rayons se sépare lui-même, au retour en P, en deux rayons. Deux des quatre rayons ainsi obtenus interfèrent en Ph, où se trouve placée une plaque photographique dans le plan focal d'un objectif.

La source S et la plaque Ph, ainsi que les miroirs et la lame, sont solidaires du disque; l'ensemble peut tourner autour du centre du disque. Quand le disque est au repos, les chemins par-

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

courus par les deux rayons qui interfèrent sont égaux et les franges sont photographiées dans la position qu'elles occupent dans ces

Fig. 14.



conditions. Lorsqu'on fait tourner le disque, on constate que le système des franges se déplace, et on le photographie dans sa nouvelle position. Les mesures ont révélé un déplacement $\frac{4\omega S}{c\lambda}$, évalué en nombre de franges, S étant la surface du carré dont les côtés sont décrits par les rayons lumineux, et ω la vitesse de rotation du disque.

On a vu dans ce résultat une objection à la théorie de la relativité; c'est là une profonde erreur : l'expérience prouve, par une méthode optique, le fait déjà connu par des expériences mécaniques — le gyroscope et le pendule de Foucault — que la rotation ne présente pas les mêmes caractères qu'une translation uniforme (n° 5), que les phénomènes ne sont pas les mêmes dans un système accéléré et dans un système en translation uniforme [1].

Voici la théorie de l'expérience de Sagnac [2].

Le disque employé avait un diamètre de 50^{cm}; la vitesse de rotation était de 1 à 2 tours par seconde. Dans ces conditions, il est absolument inutile de tenir compte de la contraction de Lorentz et de la dilatation du temps; tous les effets du second ordre sont négligeables.

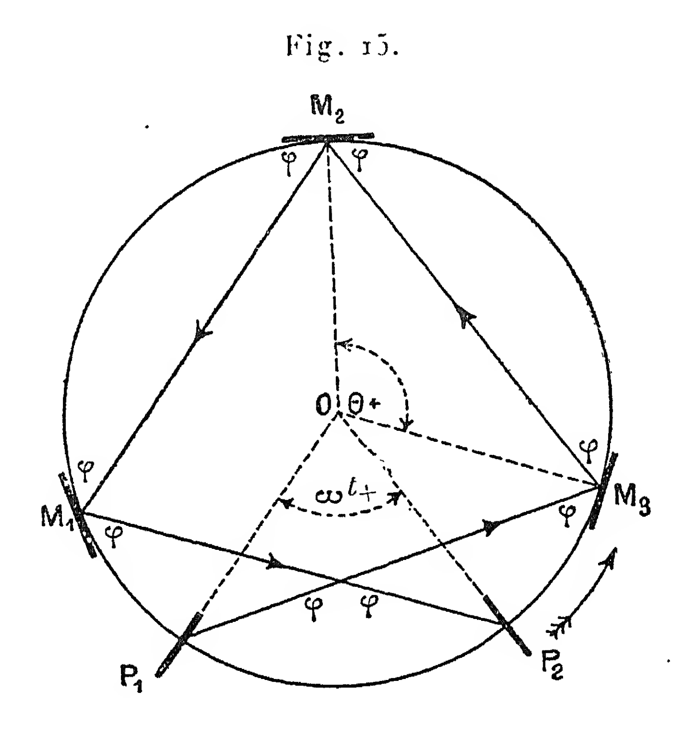
---

[1] Nous verrons cependant en relativité généralisée que les lois des phénomènes sont les mêmes dans tous les systèmes de référence, mais à condition d'introduire dans chaque système un champ de force particulier. Ce champ de force est nul dans le cas de la translation uniforme, et c'est précisément l'absence de force d'inertie qui caractérise la translation uniforme.

[2] D'après MAX VON LAUE, *Die Relativitätstheorie*, 1919, p. 24 et p. 125.

Considérons la figure ci-dessous : les quatre droites représentent le trajet de celui des rayons qui chemine dans le sens de la rotation

Fig. 15.



(sens supposé direct) du disque. P_1 et P_2 sont les positions de la lame au départ et au retour du rayon considéré.

La première question qui se pose est de savoir si, lorsque le disque tourne, le rayon issu du point P_1 d'intersection de la lame et de la circonférence du disque revient au même point de la lame, en P_2, après réflexion sur les miroirs. Il en est évidemment ainsi si l'angle d'incidence et l'angle de réflexion sur chacun des miroirs sont égaux malgré le mouvement de ceux-ci. Considérons l'un des miroirs ; dans le système de ce miroir, il y a égalité entre l'angle d'incidence et l'angle de réflexion ; voyons s'il en est de même dans le système de l'observateur. Les angles du rayon avec le miroir sont les angles formés par le rayon et la vitesse relative, puisque le miroir étant tangent au disque, la vitesse du point de contact est parallèle au plan du miroir ; la formule de l'aberration (16-7)

$$\cos\varphi = \frac{\cos\varphi' - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi'}$$

prouve que lorsque deux angles avec la vitesse relative sont égaux dans le premier système, ils sont égaux dans le second système.

Par suite les angles d'incidence et de réflexion sont égaux dans le système de l'observateur; tous les angles φ marqués sur la figure sont donc égaux, le retour du rayon issu de P_1 sur la circonférence du disque, a bien lieu en P_2, toujours sur la circonférence, et ce rayon fait avec la lame le même angle au départ et au retour.

Soit t_+ le temps que met pour aller de P_1 à P_2 le rayon qui tourne dans le sens direct des rotations; appelons θ l'angle au centre qui sous-tend chaque corde joignant les points de réflexion sur deux miroirs consécutifs. On a, r désignant le rayon du disque,

$$t_+ = \frac{8r}{c}\sin\frac{\theta}{2},$$

car le rayon parcourt quatre cordes de longueur $2r\sin\frac{\theta}{2}$.

Lorsque le disque est immobile, on a

$$4\theta = 2\pi;$$

quand il est en rotation, 4θ est accru de ωt_+,

$$4\theta = 2\pi + \omega t_+.$$

Eliminant θ entre cette relation et la précédente, on obtient

$$t_+ = \frac{8r}{c}\sin\left[\frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\omega t_+}{2}\right)\right].$$

De même, pour le rayon cheminant en sens inverse de la rotation du disque, on trouverait :

$$t_- = \frac{8r}{c}\sin\left[\frac{1}{4}\left(\pi - \frac{\omega t_-}{2}\right)\right].$$

La différence de ces deux temps est

$$\delta t = t_+ - t_- = \frac{16r}{c}\cos\left[\frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\omega\,\delta t}{4}\right)\right]\sin\left[\frac{\omega}{16}(t_+ + t_-)\right].$$

Jusqu'ici le calcul est rigoureux, étant bien entendu que les corrections de relativité sont absolument négligeables. Nous pouvons faire maintenant les approximations suivantes : la vitesse de rotation étant petite, nous négligeons les termes du second ordre en ω, $\omega\,\delta t$ devant π, nous posons le cos égal à $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, nous écri-

vons enfin

$$\omega(t_+ + t_-) = 2\omega t_0;$$

t_0 étant le temps de parcours quand le disque ne tourne pas, c'est-à-dire

$$t_0 = \frac{8r}{c}\sin\frac{\pi}{4}.$$

Négligeant $\omega^2 t_0^2$ devant 1, nous posons $\sin\frac{\omega}{8}t_0 = \frac{\omega}{8}t_0$ et nous trouvons, comme formule approchée,

$$\delta t = \frac{8\omega r^2}{c^2} = \frac{4\omega S}{c^2},$$

S étant la surface du carré. Il suffit de diviser par la période $\frac{\lambda}{c}$ de la lumière pour obtenir le rapport du déplacement des franges à leur largeur, savoir

$$\frac{c\,\delta t}{\lambda} = \frac{4\omega S}{c\lambda},$$

en accord avec les mesures de Sagnac.

CHAPITRE VIII.

LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

---

33. Transformation des équations de Maxwell pour l'espace vide (¹).

Soient X, Y, Z les composantes du vecteur force électrique (en unités électrostatiques), L, M, N les composantes du vecteur force magnétique (en unités électromagnétiques) au point d'espace, x, y, z et à l'époque t du système S en translation uniforme. Les équations de Maxwell, pour l'espace vide de matière, l'observateur étant au repos dans le système de référence, s'écrivent :

$$(1\text{-}8)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, &\qquad &\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, &\qquad &\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, &\qquad &\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.
\end{aligned}\right.$$

Supposons que le même champ soit observé dans un second système S′ en translation uniforme, animé d'une vitesse v par rapport au premier système S. Pour passer aux coordonnées x', y', z', t' du système S′ nous devons effectuer les transformations d'espace et de temps données par les formules de Lorentz; conservant la disposition d'axes précédemment adoptée, nous obtenons

---

(¹) A. EINSTEIN, *Ann. d. Physik*, t. 17, 1905.

les équations :

$$
(2\text{-}8)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t'} &= \frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(N - \frac{v}{c}Y\right)}{\partial y'} - \frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(M + \frac{v}{c}Z\right)}{\partial z'},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(Y - \frac{v}{c}N\right)}{\partial t'} &= \frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(N - \frac{v}{c}Y\right)}{\partial x'},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(Z + \frac{v}{c}M\right)}{\partial t'} &= \frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(M + \frac{v}{c}Z\right)}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial y'};\\
\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t'} &= \frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(Y - \frac{v}{c}N\right)}{\partial z'} - \frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(Z + \frac{v}{c}M\right)}{\partial y'},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(M + \frac{v}{c}Z\right)}{\partial t'} &= \frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(Z + \frac{v}{c}M\right)}{\partial x'} - \frac{\partial X}{\partial z'},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(N - \frac{v}{c}Y\right)}{\partial t'} &= \frac{\partial X}{\partial y'} - \frac{\partial \frac{1}{\alpha}\left(Y - \frac{v}{c}N\right)}{\partial x'}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le principe de relativité exige que, pour un observateur au repos dans le système S′, les équations de Maxwell soient encore vérifiées, c'est-à-dire qu'on ait, dans le système S′, les équations (1-8) avec des lettres accentuées :

$$
(3\text{-}8)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial X'}{\partial t'} &= \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'}, &\quad \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial t'} &= \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Y'}{\partial t'} &= \frac{\partial L'}{\partial z'} - \frac{\partial N'}{\partial x'}, &\quad \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial t'} &= \frac{\partial Z'}{\partial x'} - \frac{\partial X'}{\partial z'},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Z'}{\partial t'} &= \frac{\partial M'}{\partial x'} - \frac{\partial L'}{\partial y'}, &\quad \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial t'} &= \frac{\partial X'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial x'};
\end{aligned}
\right.
$$

X′, Y′, Z′ désignant les composantes du champ électrique, L′, M′, N′ les composantes du champ magnétique dans le système S′. Les équations (2-8) et (3-8) doivent être les mêmes, car chacun de ces deux systèmes d'équations est équivalent aux équations de Maxwell pour le système S. On a donc, $\psi(v)$ étant une fonction qui ne peut dépendre que de la vitesse relative :

$$
\begin{aligned}
X' &= \psi(v)X, &\quad L' &= \psi(v)L,\\
Y' &= \psi(v)\frac{1}{\alpha}\left(Y - \frac{v}{c}N\right), &\quad M' &= \psi(v)\frac{1}{\alpha}\left(M + \frac{v}{c}Z\right),\\
Z' &= \psi(v)\frac{1}{\alpha}\left(Z + \frac{v}{c}M\right), &\quad N' &= \psi(v)\frac{1}{\alpha}\left(N - \frac{v}{c}Y\right).
\end{aligned}
$$

Si l'on fait l'inversion de ces équations de deux manières différentes : 1° en les résolvant par rapport à X, Y, Z, L, M, N; 2° en permutant les lettres accentuées et non accentuées et changeant en même temps v en $-v$ (puisque $-v$ est la vitesse du système S' relativement au système S), on doit obtenir deux systèmes identiques. On trouve ainsi

$$\psi(v)\,\psi(-v) = 1.$$

La symétrie [1] exigeant qu'on ait aussi

$$\psi(v) = \psi(-v),$$

on voit que

$$\psi(v) = 1.$$

Les formules de transformation des vecteurs électrique et magnétique sont donc, en définitive,

$$(4\text{-}8)\quad \begin{cases} X' = X, & L' = L, \\ Y' = \dfrac{1}{\alpha}\left(Y - \dfrac{v}{c}N\right), & M' = \dfrac{1}{\alpha}\left(M + \dfrac{v}{c}Z\right), \\ Z' = \dfrac{1}{\alpha}\left(Z + \dfrac{v}{c}M\right), & N' = \dfrac{1}{\alpha}\left(N - \dfrac{v}{c}Y\right). \end{cases}$$

Ainsi, les équations fondamentales du champ électromagnétique [2] gardent leur structure dans tous les systèmes (*en translation uniforme*) à condition : 1° d'effectuer les transformations de coordonnées d'espace et de temps du groupe de Lorentz; 2° d'effectuer les transformations (4-8) pour les vecteurs électrique et magnétique.

34. La force électrodynamique et les phénomènes d'induction.

Le résultat exprimé par les formules (4-8) est du plus haut

---

[1] Supposons par exemple que dans le système S la composante N soit seule différente de zéro; il est clair que, par changement de signe de v sans changement de valeur numérique, Y' doit aussi changer de signe sans changer de valeur numérique.

[2] Nous verrons en relativité généralisée que les équations de Maxwell sont une forme dégénérée d'une forme tensorielle valable dans un système quelconque.

intérêt; il montre qu'un champ électrique et un champ magnétique n'ont pas d'existence absolue; leurs intensités respectives sont relatives au système de référence dans lequel on les observe.

Supposons par exemple que dans le système S il ne règne qu'un champ magnétique, que le champ électrique y soit nul :

$$X = Y = Z = 0;$$

dans le système S′ il existe, non seulement un champ magnétique

$$L' = L, \qquad M' = \frac{1}{\alpha} M, \qquad N' = \frac{1}{\alpha} N,$$

mais aussi un champ électrique

$$X' = 0, \qquad Y' = -\frac{1}{\alpha}\frac{v}{c} N, \qquad Z' = \frac{1}{\alpha}\frac{v}{c} M.$$

Le champ, qui pour le système S est un pur champ magnétique, est un champ mixte pour le système S′.

Loi de Biot et Savart. — Le résultat qui précède nous fait voir la loi fondamentale de l'électromagnétisme sous un aspect nouveau. Supposons une charge ponctuelle qui, mesurée dans le système S, soit égale à l'unité, c'est-à-dire une charge qui, immobile dans S, exerce sur une charge égale distante de 1cm une force égale à 1 dyne. D'après le principe de relativité, cette charge électrique est aussi égale à 1 si on la mesure dans le système S′ (l'invariance de la charge sera démontrée plus loin n° 38).

Si cette charge est immobile dans S, le vecteur $\vec{h}$ (X, Y, Z) est, par définition, égal à la force qui s'exerce sur elle. Si la charge est immobile dans S′ (du moins à l'instant considéré), la force qui agit sur elle, mesurée dans le système S′, est égale au vecteur $\vec{h}'$ (X′, Y′, Z′).

On disait autrefois, si une charge e est déplacée avec une vitesse v dans un champ électromagnétique $\vec{h}$, $\vec{H}$, deux forces mécaniques s'exercent sur elle : 1° la force $e\vec{h}$; 2° la force électro-

dynamique égale au produit vectoriel

$$\frac{1}{c}\left[\overrightarrow{ev}\,\overrightarrow{H}\right]\text{(}^1\text{)}.$$

Nous devons dire, avec Einstein : si une charge e est déplacée dans un champ électromagnétique, la force mécanique agissant sur elle dans son système est égale au produit de e par la force électrique qui règne dans son système, c'est-à-dire est égale au produit de e par la force électrique présente au point où elle se trouve, obtenue par transformation du champ pour un système de référence immobile par rapport à la charge.

Supposons, pour simplifier, le champ magnétique $\overrightarrow{H}$ (système S) parallèle à Oy, et la charge animée d'une vitesse v parallèlement à Ox. D'après la troisième des équations (4-8), il s'exerce sur elle, dans un système S', une force mécanique parallèle à Oz' :

$$F' = \frac{1}{\alpha}\frac{ev}{c}H.$$

Nous verrons bientôt (n° 40) que, dans le système S de l'observateur, cette force a pour valeur $F = \alpha F'$; on a donc

$$F = \alpha F' = \frac{1}{c}evH.$$

Ainsi, la formule ancienne

$$F = \frac{1}{c}\left[\overrightarrow{ev}, \overrightarrow{H}\right] \qquad \text{(produit vectoriel)}$$

est rigoureuse, car α ne s'introduit pas pour les mesures faites dans le système S de l'observateur.

Nous voyons aussi disparaître une dissymétrie qui, dans l'ancienne conception, ne correspondait pas à la réalité des phénomènes observés : il s'agit de l'action réciproque entre un aimant et un conducteur. L'expérience prouve que, pour un même mouvement *relatif* de l'aimant et du conducteur, le courant d'induction qui prend naissance est le même. Or, si l'aimant est mobile

(1) La force électrodynamique, normale à la vitesse et au vecteur magnétique, présente les caractères d'une force d'inertie et non d'une force appliquée.

et le circuit fixe, la théorie prévoyait la production d'un champ électrique, par variation du champ magnétique, d'où production d'un courant dans le circuit; mais si l'aimant est fixe et le conducteur mobile, il n'y a pas production de champ électrique dans le voisinage de l'aimant, et cependant le courant d'induction se manifeste comme dans le cas précédent. D'après la théorie d'Einstein il est bien évident qu'il n'y a aucune dissymétrie entre le cas de l'aimant mobile avec circuit fixe et le cas du circuit mobile avec aimant fixe, car, dans un cas comme dans l'autre, il se produit *dans le système de référence lié au conducteur* le même champ électrique.

Loi de l'induction. — Soit, dans le système S de l'observateur, un champ magnétique M parallèle à Oy. Nous avons, dans ce système,

$$X = Y = Z = 0, \qquad L = N = 0, \qquad M \neq 0.$$

Dans un système S′ animé, par rapport à S, d'une vitesse v parallèle à Ox, règne, d'après (4-8), le champ électromagnétique

$$X' = Y' = 0, \qquad Z' = \frac{1}{\alpha}\frac{v}{c}M, \qquad L' = N' = 0, \qquad M' = \frac{1}{\alpha}M.$$

Supposons une tige conductrice de longueur l, orientée parallèlement à Oz, et animée de la vitesse v; cette tige est soumise, dans le système S′ par rapport auquel elle est immobile, au champ électrique Z′. Alors une modification va se produire : les électrons présents dans la tige, soumis à l'action du champ Z′, vont s'accumuler à une extrémité jusqu'à ce qu'il en résulte un champ électrostatique — Z′ faisant équilibre à Z′. Le champ électrique s'annule donc dans la tige de sorte qu'après cette modification on a dans la tige

$$X' = Y' = Z' = 0.$$

Pour l'observateur du système S, le champ dans la tige n'est pas nul, on le calcule aisément en prenant les formules de transformations inverses de (4-8), c'est-à-dire en permutant dans (4-8) les lettres accentuées et non accentuées et remplaçant v par $-v$). Faisant $X' = Y' = Z' = 0$ dans ces formules inverses,

on a

$$X = Y = 0, \qquad Z = -\frac{1}{\alpha}\frac{v}{c}M', \qquad L = N = 0, \qquad M = \frac{1}{\alpha}M';$$

d'où

$$Z = -\frac{v}{c}M.$$

La différence de potentiel entre les extrémités de la tige (en unités électromagnétiques) est, pour l'observateur,

$$Zlc = -vlM,$$

vlM est le flux coupé par la tige dans l'unité de temps. C'est la loi bien connue de l'induction.

35. Retour sur l'effet Doppler et sur l'aberration de la lumière (Théorie d'Einstein) [1].

Dans un système de référence S, supposons une source d'ondes électromagnétiques suffisamment éloignée pour que les ondes puissent être considérées comme planes et représentées par les équations

$$(5\text{-}8)\qquad \left\{\begin{array}{ll} X = X_0 \sin\Phi, & L = L_0 \sin\Phi, \\ Y = Y_0 \sin\Phi, & M = M_0 \sin\Phi, \\ Z = Z_0 \sin\Phi, & N = N_0 \sin\Phi; \\ \Phi = \omega\left(t - \dfrac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z}{c}\right), & \end{array}\right.$$

(X_0, Y_0, Z_0), (L_0, M_0, N_0) sont les vecteurs qui déterminent l'amplitude du train d'ondes; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les cosinus directeurs de la normale aux ondes. Nous allons chercher quel est l'aspect de ces ondes pour un observateur du système S' animé de la vitesse v par rapport à S (disposition d'axes habituelle).

Par application des formules (4-8) pour les transformations des

[1] *Ann. d. Physik*, t. 17, 1905.

vecteurs électrique et magnétique, nous obtenons

$$(6\text{-}8)\quad \begin{cases} X' = X_0 \sin\Phi', & L' = L_0 \sin\Phi', \\ Y' = \frac{1}{\alpha}\left(Y_0 - \frac{v}{c} N_0\right)\sin\Phi', & M' = \frac{1}{\alpha}\left(M_0 + \frac{v}{c} Z_0\right)\sin\Phi', \\ Z' = \frac{1}{\alpha}\left(Z_0 + \frac{v}{c} M_0\right)\sin\Phi', & N' = \frac{1}{\alpha}\left(N_0 - \frac{v}{c} Y_0\right)\sin\Phi'; \\ \Phi' = \omega'\left(t' - \frac{a'_1 x' + a'_2 y' + a'_3 z'}{c}\right). \end{cases}$$

Comme on a

$$X = X_0 \sin\Phi, \qquad X' = X'_0 \sin\Phi'$$

et que

$$X = X', \qquad X_0 = X'_0,$$

on a nécessairement

$$\Phi = \Phi'.$$

Donc Φ est un invariant de la transformation de Lorentz.

Dans la théorie vectorielle ordinaire, lorsque la somme

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

des trois composantes A_1, A_2, A_3 d'un vecteur par trois grandeurs B_1, B_2, B_3 est un invariant pour toute transformation d'axes orthogonaux, B_1, B_2, B_3 sont les composantes d'un vecteur. Ce théorème s'étend aux vecteurs à quatre dimensions.

Posons

$$ct = u, \qquad \Phi = \frac{\omega}{c}(u - a_1 x - a_2 y - a_3 z),$$

x, y, z, $u\sqrt{-1}$ sont les composantes d'un vecteur d'Univers quadridimensionnel (x, y, z composantes d'espace, u composante de temps); puisque Φ est un invariant,

$$\frac{\omega a_1}{c}, \quad \frac{\omega a_2}{c}, \quad \frac{\omega a_3}{c}, \quad \frac{\omega}{c}\sqrt{-1}$$

sont aussi les composantes d'un quadrivecteur; par conséquent ωa_1, ωa_2, ωa_3, ω se transforment comme x, y, z, u, c'est-à-dire conformément aux formules de Lorentz. De même que

$$x' = \frac{1}{\alpha}\left(x - \frac{v}{c}u\right); \qquad y' = y; \qquad z' = z, \qquad u' = \frac{1}{\alpha}\left(u - \frac{v}{c}x\right),$$

n a

$$\omega' a'_1 = \frac{1}{\alpha}\left(\omega a_1 - \frac{v}{c}\,\omega\right); \qquad \omega' a'_2 = \omega a_2; \qquad \omega' a'_3 = \omega a_3;$$

$$\omega' = \frac{1}{\alpha}\left(\omega - \frac{v}{c}\,\omega\, a_1\right);$$

'où l'on tire

$$\omega' = \frac{1}{\alpha}\,\omega\left(1 - a_1\frac{v}{c}\right), \qquad \text{(7-8)}$$

$$\text{(8-8)} \qquad \left\{\begin{aligned} a'_1 &= \frac{a_1 - \dfrac{v}{c}}{1 - a_1\dfrac{v}{c}},\\ a'_2 &= \frac{\alpha a_2}{1 - a_1\dfrac{v}{c}},\\ a'_3 &= \frac{\alpha a_3}{1 - a_1\dfrac{v}{c}}.\end{aligned}\right.$$

Soient T la période propre de la source (système S), T' la ériode pour l'observateur du système S', φ l'angle de la vitesse v du rayon lumineux dans le système S de la source, φ' l'angle de vitesse v et du rayon reçu par l'observateur; on a

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \qquad \omega' = \frac{2\pi}{T'}; \qquad a_1 = \cos\varphi; \qquad a'_1 = \cos\varphi'.$$

1° La formule (7-8) exprime l'effet Doppler. Elle s'écrit

$$T' = T\alpha\frac{1}{1 - \dfrac{v\cos\varphi}{c}} \qquad \text{[identique à (14-7)]}$$

u

$$\text{(9-8)} \qquad \nu' = \nu\,\frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{v\cos\varphi}{c}\right),$$

étant la *fréquence propre* $\left(\frac{1}{T}\right)$ de la source et ν' la fréquence pparente pour l'observateur.

2° La formule (8-8) exprime l'aberration de la lumière :

$$\text{(10-8)} \qquad \cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \dfrac{v}{c}}{1 - \dfrac{v\cos\varphi}{c}} \qquad \text{[identique à (15-7)].}$$

3° Soient A et A′ les amplitudes respectives de la force électrique (ou magnétique) dans le système S et dans le système S′, on obtient, par application de la transformation de Lorentz au vecteur Aa_1, Aa_2, Aa_3, A :

$$(11\text{-}8) \qquad A' = A\frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right).$$

Nous pouvons maintenant trouver facilement les formules qui expriment l'effet Doppler et l'aberration par réflexion sur un miroir en mouvement.

Disposons dans le plan $x' = 0$ un réflecteur intégral, sur lequel tombent des ondes planes, et proposons-nous de chercher la fréquence (effet Doppler), l'orientation (aberration) et l'amplitude des ondes après réflexion.

D'abord, dans le système S′ du miroir, nous avons pour la lumière incidente les formules (9-8), (10-8), (11-8).

Pour la lumière réfléchie nous obtenons, dans le système S′ où le miroir est immobile,

$$(12\text{-}8) \qquad \nu'' = \nu', \qquad \cos\varphi'' = -\cos\varphi', \qquad A'' = A'.$$

Finalement, par retour au système S de l'observateur, c'est-à-dire en appliquant à partir de ν'', φ'', A'' (au lieu de ν, φ, A) les formules (9-8), (10-8), (11-8) en y changeant v en $-v$, et tenant compte de (12-8) nous obtenons pour les ondes réfléchies, dans le système de l'observateur :

$$(13\text{-}8) \qquad \nu''' = \nu''\frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi''\right) = \nu\frac{1}{\alpha^2}\left[1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right] \left(\begin{matrix}\text{effet}\\ \text{Doppler}\end{matrix}\right),$$

$$(14\text{-}8) \qquad \cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi'' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi''} = -\frac{\left[1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]\cos\varphi - 2\frac{v}{c}}{1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi + \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \text{(aberration)},$$

$$(15\text{-}8) \qquad A''' = A''\frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi''\right) = A\frac{1}{\alpha^2}\left[1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right].$$

Cette dernière formule seule exigeant que le miroir soit un réflecteur intégral.

36. Pression de la lumière sur un réflecteur intégral (Einstein).

On sait que $\frac{A^2}{8\pi}$ est la densité de l'énergie lumineuse des ondes incidentes, dans le système S; de même $\frac{A'''^2}{8\pi}$ est la densité de l'énergie des ondes réfléchies.

L'énergie, mesurée dans le système S, qui tombe sur l'unité de surface du réflecteur pendant l'unité de temps, est

$$\frac{A^2}{8\pi}(c\cos\varphi - v).$$

L'énergie réfléchie par l'unité de surface pendant l'unité de temps est

$$\frac{A'''^2}{8\pi}(-c\cos\varphi''' + v).$$

La différence de ces deux expressions est, d'après le principe de la conservation de l'énergie, égale au travail Pv produit dans l'unité de temps par la pression P de la lumière. On obtient, après réductions,

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{1}{\beta^2}\left(\cos\varphi - \frac{v}{c}\right)^2. \tag{16-8}$$

En première approximation, on retrouve l'expression connue

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi. \tag{17-8}$$

Cette expression est d'ailleurs exacte en toute rigueur dans le cas limite $v = 0$, c'est-à-dire pour un réflecteur immobile par rapport à l'observateur.

Si la réflexion a lieu sous l'incidence normale ($\varphi = 0$) sur un miroir immobile,

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi};$$

la pression est égale à la densité de l'énergie lumineuse $\Big(2\frac{A^2}{8\pi} =$ den-

sité de l'énergie incidente $\frac{A^2}{8\pi}$ + densité de l'énergie réfléchie $\frac{A^2}{8\pi}\Big)$.

La formule (16-8) montre que si

$$\cos\varphi = \frac{v}{c},$$

la pression P est nulle.

Or une force nulle se conserve, donc $P' = 0$ dans un autre système, et ceci exige que pour les observateurs fixes par rapport au miroir $\cos\varphi' = 0$, ce qui est bien vérifié d'après (10-8).

37. Relativité de l'énergie rayonnante (Einstein).

$\frac{A^2}{8\pi}$ étant la densité de l'énergie dans le système S, le principe de relativité exige que $\frac{A'^2}{8\pi}$ soit la densité de l'énergie dans le système S'. $\frac{A'^2}{A^2}$ serait le rapport des énergies d'un même rayonnement dans les systèmes S' et S si les volumes contenant ce même rayonnement étaient égaux dans les deux systèmes; tel n'est pas le cas. Les cosinus directeurs de la normale aux ondes dans le système S étant a_1, a_2, a_3, aucune énergie ne traverse la surface de la sphère

$$(x - ca_1 t)^2 + (y - ca_2 t)^2 + (z - ca_3 t)^2 = R^2 \tag{18-8}$$

qui se déplace avec la vitesse de la lumière suivant la direction de la normale aux ondes. On peut dire que l'intérieur de cette sphère contient toujours le même rayonnement. Il s'agit de savoir quelle est la quantité d'énergie comprise à l'intérieur de la même surface, relativement au système S'.

La surface sphérique (18-8) du système S est une surface ellipsoïdale dans le système S'; son équation au temps $t' = 0$ est

$$\left(\frac{1}{\alpha}x' - \frac{1}{\alpha}a_1\frac{v}{c}x'\right)^2 + \left(y' - \frac{1}{\alpha}a_2\frac{v}{c}x'\right)^2 + \left(z' - \frac{1}{\alpha}a_3\frac{v}{c}x'\right)^2 = R^2.$$

Soient V le volume de la sphère, V' celui de l'ellipsoïde; un

calcul facile montre que

$$\frac{V'}{V} = \frac{\alpha}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}.$$

Désignons par W l'énergie contenue à l'intérieur de la surface considérée, et mesurée dans le système S, par W' l'énergie mesurée dans le système S', nous obtenons

$$\text{(19-8)} \qquad \frac{W'}{W} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}V'}{\frac{A^2}{8\pi}V} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right),$$

expression qui, pour $\varphi = 0$, devient

$$\text{(20-8)} \qquad \frac{W'}{W} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Il est remarquable que l'énergie et la fréquence d'un rayonnement se transforment suivant la même loi.

Il doit résulter de là que la loi des quanta

$$w = h\nu$$

a une forme invariante et que la constante d'action h est une constante universelle.

38. Transformation des équations de Maxwell-Lorentz dans le cas d'un courant de convection.

Soient dans le système S, au point x, y, z et au temps t, ρ la densité de charge multipliée par 4π, et w_x, w_y, w_z les composantes de la vitesse des charges en mouvement. Les équations de Maxwell-Lorentz sont les suivantes :

$$\text{(21-8)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{c}\left(w_x\rho + \frac{\partial X}{\partial t}\right) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, && \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ &\frac{1}{c}\left(w_y\rho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, && \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ &\frac{1}{c}\left(w_z\rho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, && \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

et

$$\rho = \text{div.}\,\vec{h} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{22-8}$$

Si l'on applique à ces équations les formules de transformation de Lorentz, en ce qui concerne les coordonnées d'espace et de temps, et les formules de transformation (4-8) pour les vecteurs électrique $\vec{h}$ (X, Y, Z) et magnétique $\vec{H}$ (L, M, N), on trouve des équations exactement de même forme que les précédentes :

$$\frac{1}{c}\left(w'_{x'}\rho' + \frac{\partial X'}{\partial t'}\right) = \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial t'} = \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\rho' = \text{div.}\,\vec{h}' = \frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'},$$

avec les conditions suivantes :

$$w'_{x'} = \frac{w_x - v}{1 - \frac{w_x v}{c^2}}; \qquad w'_{y'} = \frac{\alpha w_y}{1 - \frac{w_x v}{c^2}}; \qquad w'_{z'} = \frac{\alpha w_z}{1 - \frac{w_x v}{c^2}} \tag{23-8}$$

et

$$\rho' = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{w_x v}{c^2}\right)\rho. \tag{24-8}$$

Les formules (23-8) expriment la loi de composition des vitesses, le système S étant animé de la vitesse $(-v)$ par rapport au système S'.

Invariance de la charge. — La formule (24-8) doit retenir l'attention ; elle donne un résultat d'une extrême importance.

Soit e la charge de l'élément de volume d'espace $dx\,dy\,dz$; on a

$$\rho = \frac{4\pi e}{dx\,dy\,dz}; \qquad \rho' = \frac{4\pi e'}{dx'\,dy'\,dz'};$$

par suite, l'équation (24-8) s'écrit

$$\frac{e'}{dx'\,dy'\,dz'} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{w_x v}{c^2}\right)\frac{e}{dx\,dy\,dz},$$

mais

$$t' = \frac{1}{\alpha}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \qquad \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{w_x v}{c^2}\right).$$

On a donc

$$e' \, dx \, dy \, dz \, dt = e \, dx' \, dy' \, dz' \, dt',$$

et puisque l'élément d'hypervolume est un invariant (nº 23),

$$e = e'. \tag{25-8}$$

La charge d'un corps mesurée dans un système quelconque a toujours la même valeur; ce qui revient à dire que l'observateur lui trouve la même valeur à l'état de repos ou à l'état de mouvement. *La charge électrique est un invariant.*

39. Application. Champ électromagnétique d'une charge en mouvement. Formule de Laplace.

Une charge e produit, dans un système S par rapport auquel elle est immobile, un pur champ électrostatique. Dans le système S′ de l'observateur, qui est animé de la vitesse $(-v)$ relativement à la charge, le champ est mixte; il existe un champ électrique et un champ magnétique.

En un point que nous pouvons prendre dans le plan des xy et que nous définissons dans le système S de la charge par sa distance r à la charge et par l'angle φ de la vitesse v et du champ électrique, on a, pour les composantes du champ,

$$X = \frac{e \cos\varphi}{r^2}, \qquad Y = \frac{e \sin\varphi}{r^2}, \qquad Z = 0; \tag{26-8}$$

$$L = M = N = 0.$$

Il s'agit de passer au système S′ de l'observateur; nous devons transformer la force électrique et les coordonnées de position. L'application des formules (4-8) donne, la vitesse du système S′ par rapport au système S étant $(-v)$,

$$X' = X, \qquad Y' = \frac{1}{\alpha} Y = \frac{1}{\alpha} \frac{e \sin\varphi}{r^2}, \qquad Z' = 0, \tag{27-8}$$

$$L' = 0, \qquad M' = 0, \qquad N' = \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c} Y = \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c} \frac{e \sin\varphi}{r^2}. \tag{28-8}$$

Dans le système de l'observateur, les longueurs parallèles à Ox' subissent la contraction de Lorentz relativement aux longueurs

mesurées dans le système de la charge, on a par suite

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{1}{\alpha}\operatorname{tang}\varphi$$

ou

$$(29\text{-}8)\qquad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{\alpha\sin\varphi'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi'}}, \\[2ex] \cos\varphi = \dfrac{\cos\varphi'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi'}}. \end{cases}$$

On a d'autre part, les longueurs normales à Ox' n'étant pas modifiées,

$$(30\text{-}8)\qquad r\sin\varphi = r'\sin\varphi';$$

d'où l'on tire

$$r^2 = r'^2\,\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi'\right)}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}.$$

Il en résulte pour le champ électrique, dans le système de l'observateur, les formules

$$(31\text{-}8)\qquad \begin{cases} X' = \dfrac{e}{r'^2}\cos\varphi'\,\dfrac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi'\right)^{\frac{3}{2}}}, \\[3ex] Y' = \dfrac{e}{r'^2}\sin\varphi'\,\dfrac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi'\right)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

et la charge en mouvement produit un champ magnétique parallèle à Oz' :

$$(32\text{-}8)\qquad N' = \frac{1}{c}\,\frac{ev\sin\varphi'}{r'^2}\,\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi'\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit aisément, d'après ces formules, que si la charge était animée de la vitesse de la lumière, le champ électromagnétique

serait concentré dans le plan équatorial, normal à la direction de propagation.

Dans le cas des faibles vitesses, la formule (32-8) se réduit à la formule bien connue

$$H = \frac{1}{c}\,\frac{ev \sin\varphi}{r^2},$$

ou, pour un élément de courant idl, (i électromagnétique

$$H = \frac{i\,dl \sin\varphi}{r^2} \qquad \text{(formule de Laplace).}$$

CHAPITRE IX.

DYNAMIQUE DE LA RELATIVITÉ.

40. La masse est fonction de la vitesse.

Supposons que, dans un système S, un point matériel soit en mouvement avec la vitesse v à l'instant t.

Introduisons un second système S′ se mouvant par rapport au premier avec la vitesse v; à l'instant considéré, le mobile a une vitesse nulle dans ce système S′. Pendant le temps infiniment court qui suit, nous pouvons, *dans le système* S′, appliquer les équations de la dynamique classique, puisque le mobile part du repos dans ce système et que les équations classiques sont exactes à la limite.

Soient x', y', z', t' les coordonnées d'espace et de temps du mobile dans le système S′, m_0 sa *masse initiale* ou *masse au repos*, c'est-à-dire sa masse pour des observateurs par rapport auxquels il est au repos à l'instant considéré. Désignons par $F'_{x'}$, $F'_{y'}$, $F'_{z'}$ les composantes, *mesurées par un observateur du système* S′, de la force qu'il subit. Nous aurons

$$(1\text{-}9) \qquad m_0\frac{d^2x'}{dt'^2} = F'_{x'}; \qquad m_0\frac{d^2y'}{dt'^2} = F'_{y'}; \qquad m_0\frac{d^2z'}{dt'^2} = F'_{z'}.$$

Pour obtenir les équations de la dynamique pour les observateurs du système S, il suffit de savoir comment se transforment $\frac{d^2x'}{dt'^2}$, $\frac{d^2y'}{dt'^2}$, $\frac{d^2z'}{dt'^2}$; $F'_{x'}$, $F'_{y'}$, $F'_{z'}$ en fonction des mesures faites dans le système S.

En ce qui concerne l'accélération, les équations de Lorentz nous donnent la réponse; on a, en adoptant la disposition d'axes précédemment considérée,

$$(2\text{-}9) \quad x' = \frac{1}{\alpha}(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{1}{\alpha}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

On déduit de là

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}\right)\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \alpha^3\frac{d^2x}{dt^2}\frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

mais $\frac{dx}{dt} = v$, puisque le mobile part du repos dans S' et de la vitesse initiale v dans S; remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par v au dénominateur de la dernière expression, et par conséquent $\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)$ par α^2, il vient

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{1}{\alpha^3}\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{3-9}$$

et par un calcul analogue, on trouverait

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{4-9}$$

Il s'agit maintenant d'obtenir la transformation des composantes de la force. A cet effet, nous considérerons le cas particulier de la force électrique pour laquelle la transformation est donnée par les formules (4-8). Supposons donc que, dans le système S, règne un champ électrique X, Y, Z (sans champ magnétique), et que la particule considérée possède une charge e; pour les observateurs de ce système, la force qui s'exerce sur la particule est

$$F_x = eX, \qquad F_y = eY, \qquad F_z = eZ.$$

Appliquant les équations de transformation, en y faisant $L = M = N = 0$, remarquant que la charge e est un invariant, on voit que, pour les observateurs du système S', il s'exerce sur la particule une force

$$F'_{x'} = F_x, \qquad F'_{y'} = \frac{1}{\alpha}F_y, \qquad F'_{z'} = \frac{1}{\alpha}F_z. \tag{5-9}$$

En substituant dans (1-9) d'une part les valeurs (3-9) et (4-9) des composantes de l'accélération, d'autre part les valeurs (5-9) des

composantes de la force, il vient

$$(6\text{-}9) \qquad \boxed{\frac{m_0}{\alpha^3}\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{F}_x; \qquad \frac{m_0}{\alpha}\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{F}_y; \qquad \frac{m_0}{\alpha}\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{F}_z.}$$

Bien qu'établies dans un cas particulier, celui de la force électrique, *ces équations s'appliquent à une force quelconque :* supposons, en effet, qu'une force mécanique, telle que la tension d'un ressort, fasse équilibre à l'action exercée par un champ électrique sur un corps électrisé ; ce sera un fait absolument indépendant de tout observateur, un fait sur lequel tous les observateurs de tous les systèmes devront se trouver d'accord. Il est donc nécessaire que, dans le passage d'un système S à un système S', les composantes de la force mécanique se transforment suivant la même loi que la force électrique (équations 5-9).

Les équations fondamentales de la dynamique nouvelle (6-9) montrent que, si l'on définit la masse comme *coefficient d'inertie*, c'est-à-dire comme coefficient de proportionnalité de la force à l'accélération (masse newtonienne), non seulement la masse mesurée dépend de la vitesse relative du corps par rapport à l'observateur, mais il faut envisager deux masses :

1° La *masse longitudinale* $m_l = \frac{m_0}{\alpha_3}$ pour la composante de l'accélération dans la direction de la vitesse ;

2° La *masse transversale* $m_\mathrm{T} = \frac{m_0}{\alpha}$.

41. Le vecteur impulsion et la masse maupertuisienne.

Bien qu'avec la disposition d'axes que nous avons considérée, les composantes $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de la vitesse v suivant les axes Ox et Oy soient nulles, complétons l'expression de la vitesse en écrivant

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Nous remarquons alors que les équations de la dynamique

(6-9) peuvent s'écrire

$$(7\text{-}9)\quad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dx}{dt}\right) = F_x; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dy}{dt}\right) = F_y; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dz}{dt}\right) = F_z}$$

Nous avons, en effet, en posant $\beta = \frac{v}{c}$,

$$(8\text{-}9)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dx}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dx}{dt}\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m_0\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\beta}{dt}\frac{dx}{dt},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dy}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{m_0\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\beta}{dt}\frac{dy}{dt};\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dz}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dz}{dt}\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m_0\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\beta}{dt}\frac{dz}{dt},
\end{aligned}\right.$$

à l'instant t considéré, d'une part,

$$\frac{dx}{dt} = c\beta, \qquad c\frac{d\beta}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

et, d'autre part,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0;$$

nous avons donc, d'une part,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dx}{dt}\right) &= m_0\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{d^2x}{dt^2}\\
&= \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2x}{dt^2}\\
&= \frac{m_0}{\alpha^3}\frac{d^2x}{dt^2};
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dy}{dt}\right) &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{m_0}{\alpha}\frac{d^2y}{dt^2},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dz}{dt}\right) &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{m_0}{\alpha}\frac{d^2z}{dt^2};
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'identité des équations (6-9) et (7-9).

Sous la forme (7-9) absolument symétrique par rapport aux coordonnées, *les équations sont indépendantes de l'orientation des axes*, c'est-à-dire qu'elles sont valables quelle que soit

l'orientation des axes par rapport à la vitesse; en un mot, elles sont absolument générales.

$F_x dt$, $F_y dt$, $F_z dt$ sont les composantes de la quantité de mouvement ou *impulsion* $d\vec{G}$ communiquée par la force. On peut écrire

$$(9\text{-}9)\qquad d\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dx}{dt}\right) = dG_x; \qquad d\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dy}{dt}\right) = dG_y; \qquad d\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dz}{dt}\right) = dG_z,$$

ou, en intégrant et prenant la quantité de mouvement nulle au repos,

$$(10\text{-}9)\qquad \boxed{\frac{m_0}{\alpha}\vec{v} = \vec{G}}$$

Si l'on définit la masse comme coefficient de proportionnalité de l'impulsion à la vitesse (masse maupertuisienne), il n'y a plus à envisager deux masses, il y a une masse unique, capacité d'impulsion,

$$(11\text{-}9)\qquad m = \frac{m_0}{\alpha},$$

qui a même valeur que le coefficient d'inertie transversal ou masse newtonienne transversale.

42. L'inertie de l'énergie [1].

Multiplions les équations (7-9) respectivement par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et ajoutons; nous obtenons

$$(12\text{-}9)\qquad \frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dz}{dt}\right) = F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt}.$$

[1] A. EINSTEIN, *Ann. d. Phys.*, t. 17, 1905. — P. LANGEVIN, Conférence à la Société de Physique, 26 mars 1913, publiée dans le *Journal de Physique*.

Le premier membre s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$
$$+\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

ou, en remarquant que

$$\beta^2=\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

$$c^2\beta^2\frac{d}{dt}\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}+c^2\beta\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\beta}{dt}=m_0c^2\left[\frac{\beta^3}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{d\beta}{dt}$$
$$=m_0c^2\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\beta}{dt}$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\alpha}\right).$$

Finalement, l'équation (12-9) prend la forme simple

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\alpha}\right)=\frac{d}{dt}(mc^2)=F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}=\frac{dW}{dt}, \tag{13-9}$$

dW étant le travail de la force ou l'énergie fournie au point matériel. Intégrant, on a

$$mc^2=W+\text{const.} \tag{14-9}$$

La variation de la masse est proportionnelle à la variation d'énergie.

L'énergie *cinétique* acquise par le point matériel en passant, dans le système S, de l'état de repos à la vitesse v est donc

$$(m-m_0)c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)=\frac{1}{2}m_0v^2\left(1+\frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}+\ldots\right), \tag{15-9}$$

formule qui donne, en première approximation, l'expression habituelle de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}m_0v^2$.

Ainsi, il y a identité, au facteur c^2 près, entre la variation de la

masse corrélative d'un changement de vitesse et la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel ou d'un corps.

Nous allons montrer que cette relation, qui vient d'être établie dans le cas particulier de l'énergie cinétique d'un mobile, doit être considérée comme générale et doit s'appliquer à toute énergie, quelle que soit sa forme.

De plus, nous serons conduits à annuler la constante de l'équation (14-9) généralisée.

1° *Masse de l'énergie rayonnante.* — Considérons un train d'ondes planes tombant normalement sur une surface noire S. Soit dW l'énergie absorbée pendant le temps dt, exerçant pendant ce temps une pression p égale à la densité ρ de l'énergie. Cette énergie dW, à l'origine du temps, était contenue dans le volume $S c\, dt$:

$$p = \rho = \frac{dW}{S c\, dt}.$$

Elle a communiqué au corps absorbant une impulsion

$$dG = F\, dt = p S\, dt = \frac{dW}{c}.$$

L'énergie rayonnante dW possède donc une quantité de mouvement

$$dG = \frac{dW}{c}, \tag{16-9}$$

et, puisque sa vitesse est c, on peut la considérer comme possédant une masse maupertuisienne $\frac{dW}{c^2}$. On a donc, pour l'énergie rayonnante,

$$mc^2 = W.$$

C'est la même équation que dans le cas de l'énergie cinétique d'un mobile (14-9) *avec une constante nulle.*

2° *Un corps qui rayonne éprouve une perte de masse égale à la masse* $\frac{W}{c^2}$ *de l'énergie rayonnée* W. — Nous traiterons seulement le cas suivant : nous supposons qu'une lame plane, normale à Ox, rayonne par ses deux faces, avec la même inten-

sité, des ondes planes se propageant de part et d'autre normalement à son plan.

Pour un observateur S lié à la source, celle-ci envoie de part et d'autre des quantités de mouvement électromagnétiques, égales et opposées; elle reste donc immobile. Soit W l'énergie totale rayonnée par une surface déterminée pendant un temps déterminé.

Imaginons un second observateur S' animé d'une vitesse v par rapport à la source, parallèlement à Ox et dans le sens des x croissants. Quel sera, pour S', l'aspect du phénomène? Pour cet observateur, le rayonnement précédemment considéré, dont l'énergie est $\frac{W}{2}$ de chaque côté de la lame pour le premier observateur S, est transformé d'après la formule (19-8).

Pour la partie qui se propage suivant la direction de la vitesse v (x' croissants), on a

$$\frac{W'_1}{\frac{1}{2}W} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

La quantité de mouvement de cette énergie W'_1 est

$$G'_1 = \frac{W'_1}{c} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{c}\,\frac{W}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Pour la partie qui se propage suivant la direction des x décroissants, on a

$$\frac{W'_2}{\frac{1}{2}W} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

$$G'_2 = \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{c}\,\frac{W}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Au total, la quantité de mouvement qui s'est propagée pour S' dans le sens des x' croissants est

$$G'_1 - G'_2 = \frac{1}{\alpha}\,\frac{W}{c^2}(-v).$$

Or $(-v)$ est la vitesse de la source pour l'observateur S'. D'après la conservation de la quantité de mouvement, $G'_1 - G'_2$ est la quantité de mouvement perdue par la source; comme la

vitesse v n'a pas changé, la variation de la quantité de mouvement de la source provient nécessairement d'une variation de masse de cette source

$$\Delta m = \frac{1}{\alpha} \frac{W}{c^2}$$

pour l'observateur S′ et, dans le système de la source

$$(17\text{-}9) \qquad \Delta m_0 = \frac{W}{c^2}$$

précisément égale à la masse de l'énergie rayonnée.

Ainsi un corps qui rayonne une énergie W perd une portion $\frac{W}{c^2}$ de sa masse, et cette portion de masse se retrouve comme capacité d'impulsion de l'énergie rayonnée. Le principe de la conservation de la quantité de mouvement, sur lequel nous nous sommes appuyés dans la démonstration, entraîne la conservation de la masse. On peut dire encore que le résultat obtenu justifie que l'on considère $\frac{W}{c^2}$ comme la masse de l'énergie rayonnante W, si l'on admet les principes de conservation de la quantité de mouvement et de la masse dans un même système.

Inversement, une absorption d'énergie entraîne une variation proportionnelle de la masse d'un corps matériel.

3° *L'énergie potentielle totale d'un électron est égale à sa masse au repos, multipliée par* c^2 (1). — Supposons que l'électron au repos soit assimilable à une sphère de rayon a possédant une charge superficielle. On sait que l'énergie potentielle du champ électrostatique h est

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \int\int\int h^2\, dV,$$

dV étant l'élément de volume, et l'intégration étant étendue à tout l'espace extérieur à l'électron. On a donc, puisque $h = -\frac{e}{r^2}$ (loi

(1) P. LANGEVIN, *Journal de Physique*. Conférence à la Société de Physique, 26 mars 1913.

de Coulomb), r, θ, φ étant des coordonnées polaires.

$$W_1 = \frac{e^2}{8\pi}\int\int\int \frac{1}{r^4}\,dV = \frac{e^2}{8\pi}\int_{r=a}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{e^2}{2a}.$$

On sait, d'autre part, que la masse au repos de l'électron est

$$m = \frac{2}{3}\,\frac{1}{c^2}\,\frac{e^2}{a}.$$

On a, par suite,

$$mc^2 - W_1 = \frac{1}{6}\,\frac{e^2}{a}.$$

Pour avoir l'égalité entre mc^2 et l'énergie totale, il faudrait une énergie supplémentaire

$$W_2 = \frac{1}{6}\,\frac{e^2}{a}.$$

Imaginons qu'une pression extérieure p s'exerce sur l'électron : l'énergie potentielle W_2 de cette action est égale au produit de p par le volume $\frac{4}{3}\pi a^3$ de l'électron : écrivons que l'énergie W_2 compense la différence entre mc^2 et W_1 :

$$\frac{4}{3}\pi a^3 p = \frac{1}{6}\,\frac{e^2}{a};$$

d'où

$$p = \frac{e^2}{8\pi a^4} = 2\pi\sigma^2,$$

en posant

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2},$$

$4\pi a^2$ est la surface de l'électron; donc σ *est la densité de charge superficielle*. D'après un résultat bien connu démontré en électrostatique, une pression p ayant la valeur $2\pi\sigma^2$ équilibrerait la tension résultant de la répulsion mutuelle des éléments qui composent la charge e.

Précisément, cette pression avait été imaginée par Henri Poincaré qui, étendant à l'électron les lois de l'électrostatique, avait admis que le milieu extérieur devait exercer une action s'opposant à la dispersion de la charge.

Il est remarquable de constater que la pression de Poincaré

fournit exactement le supplément d'énergie nécessaire pour que l'énergie potentielle totale $(W_1 + W_2)$ de l'électron au repos (énergie cinétique nulle) soit égale au produit de la masse au repos de l'électron par le carré de la vitesse de la lumière.

Ici encore, nous retrouvons l'équation (14-9) *avec une constante nulle.*

Généralisation. — Nous avons établi les résultats suivants :

1° Toute variation d'énergie *cinétique* ΔW est accompagnée d'une variation de masse $\frac{\Delta W}{c^2}$.

2° L'énergie *rayonnante* W a une masse $\frac{W}{c^2}$.

3° Une source qui émet (ou absorbe) l'énergie W subit une diminution (ou une augmentation) de masse $\frac{W}{c^2}$.

Nous avons fait le calcul dans le cas des ondes planes. Des cas plus compliqués conduisent au même résultat.

4° L'énergie *potentielle* d'un électron immobile est égale à m_0c^2, m_0 étant la masse au repos de l'électron.

Ce résultat s'étend à toute la matière, formée d'électrons positifs [1] et négatifs.

5° Dans tous les cas où l'on peut calculer l'énergie *totale* (potentielle et cinétique) d'un système, on la trouve égale au produit de la masse du système par le carré de la vitesse de la lumière.

On est donc conduit à généraliser l'équation (14-9) et, en même temps, à annuler la constante de cette équation

$$W = mc^2,$$

et l'on peut énoncer les lois suivantes :

Toute variation d'énergie (potentielle ou cinétique) d'un système est accompagnée d'une variation de masse égale au quotient de cette variation d'énergie par le carré de la vitesse de la lumière.

---

(1) Il est vraisemblable que l'ion positif d'hydrogène ou noyau atomique de l'hydrogène est l'électron positif.

Toute forme d'énergie possède de l'inertie; la masse de l'énergie W est $\frac{W}{c^2}$ (masse maupertuisienne ou capacité d'impulsion).

Toute masse m représente une énergie totale mc^2.

43. Quelques conséquences de l'inertie de l'énergie (P. Langevin).

1° *Variation de la température.* — Une masse d'eau, par exemple, égale à 1^g à la température de $0°$, aura à $100°$ une inertie plus grande. La différence s'obtient en divisant l'énergie $4,19.10^9$ ergs (100 calories) par $c^2 = 9.10^{20}$. On trouve 5.10^{-12} gr., accroissement d'ailleurs insensible.

Malgré la petitesse de l'effet, cet exemple montre que *la notion de masse cesse de se confondre avec celle de quantité de matière.* Deux masses d'eau égales, prises l'une à $100°$, l'autre à $0°$, ne contiennent pas la même quantité de matière, puisqu'elles cessent d'être égales quand on les ramène toutes deux à la même température. Deux quantités d'eau contenant le même nombre de molécules n'ont la même masse que si elles sont prises à la même température.

2° *Réactions chimiques.* — La masse d'un composé n'est pas rigoureusement égale à la somme des masses des composants. Par exemple, lorsque 2^g d'hydrogène s'unissent à 16^g d'oxygène, il se dégage $2,87.10^{12}$ ergs; on n'obtient pas 18^g d'eau, mais $3,2.10^{-6}$ milligr. en moins.

3° *Transformations radioactives.* — Dans les transformations radioactives, l'énergie libérée est considérablement plus grande que l'énergie mise en jeu dans les réactions chimiques. Par exemple, la transformation complète d'un gramme de radium en hélium et en radium-D libère $1,1.10^{17}$ ergs; il doit en résulter une perte de masse égale à $0^{mg},12$; ce n'est d'ailleurs qu'une étape des transformations qui partent de l'uranium pour aboutir à un plomb; la masse globale de l'hélium et du plomb engendrés par

une certaine quantité d'uranium est certainement inférieure de plus de $\frac{1}{10000}$ à la masse de cette quantité d'uranium.

Si la masse d'une même portion de matière se conservait exactement au cours des transformations radioactives dont cette portion de matière peut être l'objet, il en résulterait des relations simples entre les masses atomiques des éléments successivement engendrés. Dans une transformation accompagnée seulement d'une émission β, la masse atomique ne changerait pas, puisque le nouvel atome, pour redevenir électriquement neutre, doit récupérer un nombre d'électrons égal au nombre d'électrons perdus. Dans le cas d'une émission α, la masse atomique diminuerait exactement de celle d'un atome d'hélium : la différence entre la masse atomique de l'uranium et celle du radium devrait être exactement le triple de la masse atomique de l'hélium, puisqu'il y a entre l'uranium et le radium trois produits donnant des rayons α.

L'énergie libérée étant inerte, il ne doit pas en être ainsi : les différences doivent être plus grandes et les écarts, proportionnels aux énergies perdues pendant la transformation, peuvent être notables [1].

Langevin voit dans les écarts à la loi de Prout une confirmation de l'inertie de l'énergie. Prout a émis l'hypothèse que les atomes sont construits à partir d'un élément primordial, et cette idée est reprise aujourd'hui si l'on admet, comme cela est possible et même probable, que le noyau atomique de l'hydrogène et l'électron positif. Le nombre des électrons négatifs de l'atome neutre étant nécessairement égal au nombre des électrons positifs, la masse d'un atome neutre devrait être un multiple exact de celle de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire que les poids atomiques, calculés en prenant $H = 1$, devraient être des nombres entiers. Effectivement, les poids atomiques sont groupés autour de nombres entiers, mais il y a cependant des écarts :

$$\mathrm{Li} = 6{,}94, \quad \mathrm{Gl} = 9, \quad \mathrm{Bo} = 10{,}90, \quad \mathrm{C} = 11{,}91, \quad \mathrm{Az} = 13{,}90,$$
$$\mathrm{O} = 15{,}87, \quad \mathrm{Fl} = 18{,}90, \quad \ldots$$

---

(1) Des mesures suffisamment précises n'ont pas encore été faites pour vérifier ce résultat.

Langevin a proposé l'explication suivante : les écarts proviennent de ce que la formation des atomes à partir d'éléments primordiaux (par désintégration radioactive, ou par un processus inverse non encore observé, mais qui s'est nécessairement produit dans la formation des atomes lourds) s'accompagne de variations d'énergie interne par émission ou absorption de rayonnement. Les écarts $\Delta m = \frac{1}{c^2} \Delta W$ sont tels que les énergies mises en jeu seraient du même ordre de grandeur que celles observées effectivement au cours des transformations radioactives.

Il faut remarquer toutefois que, dans certains cas, par exemple pour le chlore et le néon, le mélange d'isotopes ayant les mêmes propriétés, mais des poids atomiques différents, est une autre cause d'écarts à la loi de Prout.

44. La matière réservoir d'énergie.

Soit m_0 la masse initiale ou masse au repos d'un corps. La constante de l'équation (14-9) étant nulle, lorsque le corps est animé de la vitesse v par rapport à un système S, son énergie *totale* pour les observateurs de ce système est

$$(18\text{-}9) \quad W = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 = m_0 c^2 + \boxed{\frac{1}{2} m_0 v^2} + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Le second terme et les suivants, qui dépendent de la vitesse v, représentent l'énergie cinétique relative au système S; cette énergie se réduit pratiquement au second terme, $\frac{1}{2} m_0 v^2$, pour les faibles vitesses. Mais si la vitesse croît, l'énergie cinétique augmente plus rapidement que le carré de la vitesse, et elle croît indéfiniment quand la vitesse tend vers la vitesse de la lumière; la vitesse de la lumière nous apparaît, une fois de plus, comme une vitesse limite qu'aucune matière ne peut atteindre.

Le premier terme $m_0 c^2$ est l'énergie intra-atomique; c'est la somme des énergies cinétiques et potentielles des particules électrisées qui composent la matière. Cette énergie a une grandeur fantastique : un gramme de matière, quelle que soit sa nature,

correspond à la présence d'une énergie interne égale à $9,10^{20}$ ergs, énergie qui permettrait de soulever trente millions de tonnes au sommet de la Tour Eiffel.

Presque toute l'énergie interne appartient aux noyaux atomiques, à ces mondes fermés, insensibles aux actions extérieures. Une très faible partie de l'énergie des noyaux est libérée spontanément dans les transformations radioactives ; une portion d'énergie, considérablement plus petite encore, provenant des électrons qui gravitent autour des noyaux, est dégagée dans le rayonnement, ou mise en jeu dans les réactions chimiques.

45. Le principe de la conservation de la masse se confond avec le principe de la conservation de l'énergie.

Dans un système *isolé*, les diverses parties échangent de l'énergie entre elles ; les masses individuelles ne se conservent donc pas : seule la masse de l'ensemble reste invariable. Le principe de la conservation de la masse n'est pas distinct du principe de la conservation de l'énergie.

Si l'on prend, comme on le fait d'ailleurs souvent, la vitesse de la lumière dans le vide comme unité naturelle et fondamentale, on peut dire : la masse d'un corps est égale à son énergie totale.

Les masses individuelles ne se conservant pas, l'individualité d'une portion de matière ne peut plus être caractérisée par sa masse : il faut la chercher dans le nombre des éléments primordiaux dont elle est formée, car ce nombre reste seul invariable à travers tous les changements que subit la portion de matière (P. Langevin).

46. Quadrivecteurs d'espace-temps.

Considérons un événement origine O et un point-événement ou point d'Univers M de coordonnées x, y, z, t ; ces coordonnées définissent un quadrivecteur OM.

En géométrie ordinaire, les cosinus directeurs d'une droite OM

joignant l'origine O à un point d'espace M à la distance s sont $\frac{x}{s}$, $\frac{y}{s}$, $\frac{z}{s}$ et l'on a

$$\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{s^2} + \frac{z^2}{s^2} = 1.$$

Dans la géométrie des événements, on a de même

$$(19.9) \qquad -\frac{x^2}{s^2} - \frac{y^2}{s^2} - \frac{z^2}{s^2} + \frac{c^2 t^2}{s^2} = 1.$$

$\frac{x}{s}$, $\frac{y}{s}$, $\frac{z}{s}$, $\frac{ct}{s}$ ne sont plus des cosinus, ce sont des *coefficients de direction dans l'espace-temps*.

Dans la représentation géométrique de Minkowski (n° 27), on doit distinguer deux natures de quadrivecteurs : les vecteurs de temps et les vecteurs d'espace. Le vecteur OM est un vecteur de temps si M appartient au domaine antérieur ou au domaine postérieur ($s^2 > 0$), c'est-à-dire si la droite OM de la représentation géométrique coupe l'espace hyperbolique à deux nappes

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -1$$

et peut être prise comme axe du temps, en d'autres termes encore si les événements O et M forment un couple dans le temps. Le vecteur OM est un vecteur d'espace si le point d'Univers M est dans le domaine intermédiaire ($s^2 < 0$).

Plus généralement, un vecteur est un vecteur de temps ou un vecteur d'espace suivant qu'une direction parallèle (c'est-à-dire ayant mêmes coefficients de direction) menée par le point-événement origine O peut ou non servir d'axe du temps, ou encore suivant que les événements origine et extrémité du vecteur forment un couple dans le temps ou un couple dans l'espace.

En géométrie ordinaire, les vecteurs dont les composantes sont x, y, z; x_1, y_1, z_1 sont orthogonaux si l'on a

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0.$$

De même, nous dirons que les quadrivecteurs x, y, z, t; x_1, y_1, z_1, t_1 sont *orthogonaux* si la condition suivante est

en cinématique ordinaire la vitesse est tangente à la trajectoire. On a d'ailleurs

$$(23\text{-}9)\qquad -\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{c\,dt}{d\tau}\right)^2=\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2=c^2.$$

Quadrivecteur de l'accélération. — De la relation précédente (23-9), on tire

$$-\frac{dx}{d\tau}\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dz}{d\tau}\frac{d^2z}{d\tau^2}+\frac{c\,dt}{d\tau}\frac{c\,d^2t}{d\tau^2}=0,$$

relation qui exprime, d'après (20-9), que les grandeurs

$$(24\text{-}9)\qquad \frac{d^2x}{d\tau^2},\quad \frac{d^2y}{d\tau^2},\quad \frac{d^2z}{d\tau^2},\quad \frac{c\,d^2t}{d\tau^2}$$

sont les composantes d'un nouveau vecteur, le *vecteur de l'accélération, orthogonal au vecteur de mouvement ou orthogonal à la ligne d'Univers.*

Le vecteur de mouvement étant un vecteur de temps, puisqu'il est tangent à la ligne d'Univers, c'est-à-dire au temps propre, le vecteur de l'accélération est nécessairement un vecteur d'espace.

Quadrivecteur force. — Pour transformer la force F_x, F_y, F_z en un quadrivecteur de l'espace-temps, multiplions ses composantes par $\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\alpha}$. Les équations fondamentales de la dynamique (7-9) s'écrivent

$$(25\text{-}9)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(m_0\frac{dx}{d\tau}\right)&=m_0\frac{d^2x}{d\tau^2}=\frac{1}{\alpha}F_x=\Phi_x,\\ \frac{d}{d\tau}\left(m_0\frac{dy}{d\tau}\right)&=m_0\frac{d^2y}{d\tau^2}=\frac{1}{\alpha}F_y=\Phi_y,\\ \frac{d}{d\tau}\left(m_0\frac{dz}{d\tau}\right)&=m_0\frac{d^2z}{d\tau^2}=\frac{1}{\alpha}F_z=\Phi_z.\end{aligned}\right.$$

La quatrième composante Φ_t du quadrivecteur (composante de temps) s'obtient par la condition que ce quadrivecteur soit dirigé suivant le quadrivecteur d'accélération

$$(26\text{-}9)\qquad m_0\frac{c\,d^2t}{d\tau^2}=\Phi_t.$$

On doit remarquer que les équations (25-9)

$$m_0 \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \Phi_x, \qquad m_0 \frac{d^2 y}{d\tau^2} = \Phi_y, \qquad m_0 \frac{d^2 z}{d\tau^2} = \Phi_z$$

sont *sous la forme newtonienne*, avec une masse constante, la masse au repos du point matériel. Effectivement le point matériel est au repos dans le système qui lui est lié, où le temps est τ.

Les composantes d'espace de la force de Minkowski sont liées aux composantes de la force F_x, F_y, F_z par les relations

$$(27\text{-}9) \qquad \Phi_x = \frac{1}{\alpha} F_x; \qquad \Phi_y = \frac{1}{\alpha} F_y; \qquad \Phi_z = \frac{1}{\alpha} F_z.$$

L'impulsion d'Univers. — Multiplions par la constante m_0 les composantes du quadrivecteur de mouvement, nous obtenons les composantes de l'impulsion d'Univers :

$$(28\text{-}9) \qquad m_0 \frac{dx}{d\tau}, \quad m_0 \frac{dy}{d\tau}, \quad m_0 \frac{dz}{d\tau}, \quad m_0 \frac{c\,dt}{d\tau};$$

m étant la masse $\frac{m_0}{\alpha}$ du point matériel dans le système x, y, z, t, ces composantes s'écrivent, puisque $d\tau = \alpha\,dt$,

$$m \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{dz}{dt}, \quad mc.$$

Les trois composantes d'espace de l'impulsion d'Univers sont les trois composantes de la quantité de mouvement, la composante de temps est l'énergie totale, divisée par c.

Ce quadrivecteur englobe donc la quantité de mouvement et l'énergie.

47. Unification des principes de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement. Conservation de l'impulsion d'Univers (1).

Soit un système matériel isolé. En Mécanique on envisage trois principes : la conservation de la masse, la conservation de l'énergie, la conservation de la quantité de mouvement.

(1) D'après une Note de M. Langevin.

Nous avons déjà identifié le principe de la conservation de la masse et le principe de la conservation de l'énergie (n° 45).

La conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, qui s'écrivent

$$\Sigma G_x = \text{const.}, \qquad \Sigma G_y = \text{const.}, \qquad \Sigma G_z = \text{const.}, \qquad \Sigma W = \text{const.},$$

se résument maintenant dans l'affirmation que *la somme des quadrivecteurs impulsions d'Univers, somme entendue au sens géométrique, reste constante dans un système matériel isolé.*

Il ne subsiste plus qu'un principe unique, la conservation de l'impulsion d'Univers.

Ce principe a un sens absolu indépendant du système de référence, tandis que les composantes d'espace et de temps du vecteur d'Univers, c'est-à-dire la quantité de mouvement et l'énergie, ne restent constantes que dans un même système et varient quand on passe d'un système à un autre.

Seul l'ensemble des principes de la dynamique a un sens absolu.

Loin de compliquer les lois de la Nature, le principe de relativité, par sa puissance de simplification, conduit à une synthèse qui apparaîtra plus complète encore en relativité généralisée et sur la beauté de laquelle il serait superflu d'insister.

CHAPITRE X.

48. Les électrons des rayons [illegible] ont des vitesses qui convergent vers la vitesse de la lumière.

[illegible]

49. Vérification de la loi [illegible]

[illegible]

[illegible]

hypothèses ont été envisagées : l'hypothèse de Max Abraham, supposant l'électron sphérique et indéformable; l'hypothèse de Lorentz, qui avait appliqué à l'électron la contraction imaginée pour expliquer l'expérience de Michelson; l'hypothèse de Bücherer et Langevin basée sur une déformation à volume constant.

La formule de Lorentz, tenant compte de la contraction des longueurs, était précisément celle qui est conforme au principe de relativité et qui a été retrouvée par Einstein ([1]).

Kaufmann (1902-1906), puis Bücherer (1908-1909) ont entrepris des expériences qui avaient pour objet de décider entre les trois formules proposées. Kaufmann a dévié les rayons β, émis par un grain de fluorure de radium, simultanément dans deux directions perpendiculaires par un champ magnétique et un champ électrique; les mesures n'ont pas été assez précises pour trancher la question. Bücherer a disposé le champ magnétique et le champ électrique de manière que leurs actions se compensent; il a obtenu des résultats qui concordent avec la formule de Lorentz-Einstein beaucoup mieux qu'avec les autres formules.

Des mesures plus précises ont été faites par Ch.-Eug. Guye et Lavanchy ([2]) sur les rayons cathodiques à grande vitesse. Si l'on observe la déviation, par un champ magnétique connu H, des rayons cathodiques produits sous une différence de potentiel ψ connue, on obtient, d'après la théorie de la relativité, les deux relations suivantes :

1° Le travail effectué par le champ électrique sur la charge e est égal à l'accroissement d'énergie cinétique de l'électron

$$e\psi = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right);$$

2° R étant le rayon de courbure de la trajectoire dans le champ

---

([1]) Il est à remarquer que la théorie donnée par Lorentz s'appliquait seulement à une masse d'origine électromagnétique. D'après la théorie d'Einstein, la même formule est nécessairement exacte pour toute masse, quelle que puisse être l'origine de l'inertie.

([2]) *Arch. des Sciences phys. et nat.*, Genève, t. 40, octobre 1915.

[illegible]

50. La structure des raies de l'hydrogène et des spectres de rayons X

[illegible]

On sait que N. Bohr [illegible] forme d'un noyau [illegible] duquel gravite un unique électron [illegible] application de la théorie des quanta a permis [illegible] spectre de Balmer et à calculer la constante de Rydberg [illegible] la masse de l'électron [illegible] la constante [illegible] de Planck.

Bohr avait supposé que [illegible] des orbites [illegible] Sommerfeld a étendu la théorie au cas des orbites elliptiques [illegible]

mais le résultat est le même : on trouve toujours la série de Balmer avec une fréquence unique pour chaque raie.

Sommerfeld eut alors l'idée de remplacer la mécanique ordinaire par la mécanique de la relativité ([1]), les vitesses prises par l'électron sur les diverses orbites stables étant déjà une fraction sensible de la vitesse de la lumière.

Le résultat a été remarquable. *La dynamique de la relativité donne, non seulement qualitativement, mais quantitativement, la structure exacte des raies de l'hydrogène.*

Dans le cas d'atomes plus complexes, formés d'anneaux d'électrons gravitant autour d'un noyau, le problème de l'émission par les anneaux extérieurs (émission lumineuse) devient trop compliqué pour pouvoir être résolu; mais s'il s'agit des anneaux les plus voisins du noyau, la question est plus simple; on trouve les spectres des rayons X et l'on explique la loi de Moseley.

Sommerfeld a montré que la dynamique de la relativité conduit, pour les rayons X, à la même structure que pour les raies de l'hydrogène, mais avec des composantes d'autant plus séparées que le nombre atomique de l'élément (charge du noyau, la charge de l'électron étant prise pour unité, ou rang dans la classification des éléments) est plus grand (parce que la vitesse des électrons voisins du noyau est d'autant plus grande que la charge de celui-ci est plus considérable). Par exemple, les raies L_α et $L_{\alpha'}$ de l'uranium sont les équivalents du doublet H_α de l'hydrogène, mais avec un écart de fréquence cent millions de fois plus grand. La théorie de Sommerfeld présente un accord excellent avec l'expérience.

L'explication de la structure des spectres par la dynamique nouvelle constitue une remarquable confirmation du principe de relativité. Il est établi aujourd'hui que les problèmes relatifs aux mouvements intra-atomiques exigent l'emploi de la dynamique nouvelle pour donner des solutions en accord avec l'expérience.

51. Retour sur l'expérience de Michelson. Sa signification.

On présente souvent l'expérience de Michelson comme l'unique base du principe de relativité et beaucoup de personnes objectent

---

([1]) *Atombau und Spektrallinien*, 1921, p. 306 et suivantes.

qu'il est scabreux de bâtir une pareille théorie sur une expérience dont le résultat a été négatif.

Il est essentiel de faire remarquer que ce n'est pas sur l'expérience de Michelson qu'il faut fonder la théorie de la relativité. Cette théorie est basée sur les formules de transformation de Lorentz, qui sont implicitement contenues dans les équations fondamentales de Maxwell : *c'est la nécessité de conserver leur structure aux équations de l'électromagnétisme quand on change de système de référence qui est la base solide de toute la théorie.* L'expérience de Michelson a joué un rôle considérable, parce qu'elle a d'abord appelé l'attention sur la discordance entre l'expérience et les prévisions déduites des lois de la mécanique classique; on a ensuite reconnu la cause profonde de ce désaccord. Si maintenant on donne à l'expérience de Michelson son véritable sens, on constate qu'elle vient simplement se joindre aux autres vérifications expérimentales du principe de relativité.

La relativité généralisée et la loi de gravitation d'Einstein nous apporteront des vérifications plus remarquables encore que celles qui viennent d'être indiquées.

DEUXIÈME PARTIE.

LA RELATIVITÉ GÉNÉRALISÉE. GRAVITATION ET ÉLECTRICITÉ.

CHAPITRE XI.

LE CHAMP DE GRAVITATION.

52. Conditions d'application du principe de relativité restreint.

Une conception fondamentale est à la base de la théorie de la relativité restreinte : celle du mouvement rectiligne et uniforme. Cette notion doit être précisée car il semble que l'état de mouvement rectiligne et uniforme n'ait pas de sens absolu. S'il est légitime de parler d'un système en mouvement rectiligne et uniforme *par rapport à un autre*, quel critérium a-t-on pour décider si un système envisagé isolément est ou non en translation uniforme?

Voici dans quel sens on peut répondre à la question. *Nous supposons qu'on peut trouver un système* S *tel que, dans ce système, la loi d'inertie de Galilée soit exacte :* Un point matériel sur lequel n'agit aucune force appliquée se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme; cela signifie : dans ce système S, nous envisageons des corps de référence ou des axes de référence, immobiles par définition; un point matériel sur lequel n'agit aucune force appliquée se déplace d'un mouvement de translation uniforme par rapport à ces corps ou axes. En d'autres termes encore, *il ne règne dans ce système aucun champ de force d'inertie.* Cette définition seule a un sens précis.

Un tel système est dit *système galiléen*, et d'autres systèmes S′, S″,... sont également des systèmes galiléens s'ils sont animés par rapport à S d'un mouvement de translation uniforme, sans rotation.

Le principe de relativité restreint n'envisage que des systèmes galiléens. Il affirme que dans tous ces systèmes les lois de l'électromagnétisme exprimées par les équations de Maxwell-Lorentz sont exactes; que la lumière se propage avec la même vitesse c dans toutes les directions, c étant une constante universelle; qu'on peut faire une mesure optique du temps; que, d'une façon générale, les lois des phénomènes sont les mêmes.

Un espace-temps pouvant contenir dans toute son étendue une infinité de systèmes galiléens est un Univers de Minkowski (Chap. VI). Il est régi par les lois de l'électromagnétisme sous leur forme habituelle. Nous le qualifierons d'*euclidien* à cause de l'analogie (n° 26) entre l'état de mouvement rectiligne et uniforme, c'est-à-dire entre la *droite d'Univers* dans l'espace-temps quadridimensionnel, et la ligne droite dans l'espace tridimensionnel de la géométrie euclidienne [1]. Comme cet espace, l'Univers de Minkowski est infini.

Dans l'étude de la relativité restreinte, nous avons totalement négligé le champ de gravitation. Cependant, dans la réalité des

---

[1] Il y a cependant une grosse différence déjà signalée, mais sur laquelle il convient d'insister. Dans l'espace tridimensionnel euclidien, le carré de la distance de deux points peut être mis, par un choix convenable des coordonnées (axes rectangulaires), sous la forme d'une somme de trois carrés :

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Dans l'espace-temps de Minkowski, les carrés qui interviennent dans l'expression du carré de l'intervalle entre deux événements ne sont pas tous affectés du même signe (à moins d'introduire une coordonnée temps imaginaire)

$$s^2 = -(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 + c^2(t_2 - t_1)^2.$$

Comme dit Eddington, le fait que le temps n'intervient pas avec le même signe que les distances « est le secret des différences que présentent les manifestations du temps et de l'espace dans la nature ».

La géométrie de Minkowski (n° 27) est hyperbolique. Néanmoins, malgré cette modification de la géométrie euclidienne, nous dirons qu'un espace-temps caractérisé par l'expression précédente de l'invariant s^2 est un Univers euclidien.

choses, dans l'Univers réel, la gravitation s'exerce partout et agit sur toute portion de matière. Agit-elle aussi sur l'énergie et ne vient-elle pas détruire l'*homogénéité*, qui est caractéristique de l'Univers de Minkowski ?

53. La pesanteur de l'énergie.

La dynamique de la relativité restreinte a pour conséquence la loi, vérifiée d'ailleurs par l'expérience, de l'inertie de l'énergie, mais n'implique pas *a priori* que l'énergie soit pesante.

Une question capitale se pose donc : la pesanteur est-elle, comme l'inertie, une propriété de l'énergie? Est-elle liée à l'inertie? Lorsque la *masse inerte* d'un corps change avec son énergie totale, en est-il de même de la *masse pesante ?*

L'expérience répond par l'affirmative ([1]). Supposons qu'une perte d'énergie par rayonnement, d'où résulte une variation proportionnelle de la masse inerte, ne s'accompagne d'aucune variation de poids; il en résulterait qu'une certaine quantité d'uranium et l'ensemble des produits de sa transformation, hélium et plomb, auraient des poids égaux mais des masses différentes, et par suite ne prendraient pas la même accélération sous l'influence de la pesanteur. Il devrait exister, en un même lieu, pour l'uranium et le plomb, une différence dépassant $\frac{1}{10000}$ dans les valeurs de l'accélération due à la pesanteur.

Or les expériences de M. Eotvös ont établi que l'accélération de la pesanteur est, en un même lieu, la même pour tous les corps. Cette vérification a été faite au moyen de la balance de torsion, qui a permis de constater que la direction de la verticale est exactement la même pour tous les corps : cette direction est celle de la résultante du poids et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre; comme la force centrifuge est proportionnelle à la masse inerte, si le poids n'était pas proportionnel à cette masse, la verticale n'aurait pas la même direction pour tous les corps. La constance du rapport entre le poids et la masse inerte a été vérifiée

([1]) P. LANGEVIN, *Journal de Physique*, Conférence à la Société de Physique, mars 1913. — A. EINSTEIN, *Ann. de Phys.*, t. 49, 1916.

avec une précision qui dépasse le vingt-millionième : nous sommes loin d'écarts supérieurs au dix-millième.

Nous avons vu, d'autre part, que les petits écarts des masses atomiques résultent vraisemblablement de variations d'énergie interne lors de la formation des atomes (P. Langevin). Nous pouvons remarquer que ces écarts se constatent par des mesures de poids.

Nous sommes donc amenés à conclure que l'énergie est pesante et qu'il y a, dans un champ de gravitation déterminé, proportionnalité exacte entre le poids et la masse inerte de l'énergie.

Il était donc naturel d'admettre que l'énergie rayonnante, en particulier la lumière, est pesante, et l'on devait penser qu'un rayon lumineux s'incurve dans un champ de gravitation.

Einstein a d'abord appliqué la loi de Newton [1]; le calcul de l'angle des asymptotes de la trajectoire hyperbolique suivie par un mobile, dont la vitesse à grande distance du Soleil serait c, a conduit au résultat suivant : un rayon lumineux dont la trajectoire passerait à la distance minimum r du centre du Soleil devrait subir une déviation

$$\alpha = \frac{2\,GM}{rc^2},$$

G étant la constante de la gravitation, et M la masse du Soleil. Pour un rayon passant tangentiellement au bord du Soleil, on aurait $\alpha = 0'', 87$.

Mais la découverte de la loi réelle de la gravitation, faite plus tard par Einstein, a montré que la loi de Newton n'est qu'une approximation pour les faibles vitesses, et que la déviation d'un rayon lumineux doit être le double de la valeur précédente, c'est-à-dire $1'', 74$. Nous verrons que les observations ont vérifié l'exactitude de la loi d'Einstein.

54. La généralisation du principe de relativité.

La pesanteur de la lumière met pour la première fois la gravi-

---

[1] Ce premier raisonnement d'Einstein était hybride : il associait le point de vue de la propagation de la lumière, régie par les lois de l'électromagnétisme qui impliquent des actions de proche en proche à travers l'espace, avec le point de vue de la mécanique classique, celui des actions instantanées à distance.

tation en liaison avec les phénomènes électromagnétiques. De graves conséquences en résultent.

Pour un observateur lié à la terre, un mobile lancé et abandonné à lui-même ne satisfait pas à la loi galiléenne d'inertie puisqu'il est dévié par la pesanteur (et la force centrifuge composée due à la rotation de la Terre). Nous voyons qu'il en est de même pour la lumière et que par suite la vitesse d'une onde n'est pas — toujours pour l'observateur terrestre — rigoureusement constante sur tout son parcours. La même conclusion s'applique à tous les mondes réels de l'Univers : d'aucun système naturel on ne peut voir — du moins sur une grande étendue — un mobile ou même un rayon de lumière se propager suivant un mouvement rectiligne et uniforme; en un mot, le système galiléen n'est qu'une fiction.

Faut-il donc considérer le principe de relativité comme une abstraction en dehors des réalités objectives? Doit-on renoncer à cette admirable synthèse et considérer l'invariance des lois de la Nature comme une simple approximation, d'autant meilleure que le système de référence diffère moins d'un système galiléen?

Peut-on, au contraire, étendre le principe de la relativité au cas d'un système de référence quelconque?

Einstein n'a pas hésité : il a érigé en principe l'affirmation suivante :

Tous les systèmes de référence sont équivalents pour formuler les lois de la Nature : ces lois sont « covariantes » [1] *vis-à-vis de transformations de coordonnées arbitraires.*

Les lois de la Physique doivent être telles, qu'elles soient valables dans un système de référence absolument quelconque.

Cette généralisation du principe de relativité s'impose. En effet, toutes les sensations pour lesquelles nous percevons l'Univers sont déterminées par des coïncidences absolues (par exemple la coïncidence d'une onde lumineuse avec notre rétine); toutes les lois de notre science sont basées sur la constatation de coïncidences dans l'Espace-Temps. Dans le langage de la relativité, ces coïncidences

(1) Ce terme signifie que si ces lois sont données dans un système, elles sont données à la fois dans tous les systèmes.

sont des intersections de lignes d'Univers, absolues et par suite indépendantes de tout système de référence.

Voici une image, due à Eddington [1], qui fait comprendre la question : « Supposons tracé un réseau de lignes d'Univers et imaginons-le placé dans une masse gélatineuse. Si maintenant nous déformons cette gelée d'une manière quelconque, chaque ligne d'Univers se déforme, mais les intersections continuent à se succéder dans le même ordre et aucune intersection supplémentaire ne se trouvera créée. La gelée déformée nous donnera une histoire du monde aussi exacte qu'avant sa déformation, et il n'existe aucun critérium qui nous permette de dire qu'une des deux représentations est préférable à l'autre.

» Supposons maintenant que nous introduisions des divisions de l'espace et du temps, ce que nous pourrions faire en traçant des mailles rectangulaires dans les deux états successifs de la gelée. Nous avons maintenant deux manières de situer les lignes d'Univers et les événements dans l'espace et dans le temps, manière que nous devons traiter sur un pied d'égalité. Évidemment nous ne changeons rien au résultat si, au lieu de déformer d'abord la gelée puis d'introduire des mailles régulières, nous introduisons des mailles irrégulières dans une gelée non déformée. Tous les systèmes de mailles sont donc équivalents. »

Cependant, les effets de l'accélération paraissent contredire le principe généralisé. Par exemple, dans un véhicule un voyageur est renversé par suite d'un coup de frein trop brusque; c'est là un effet bien réel et si l'on venait dire au voyageur que les lois des phénomènes sont les mêmes quel que soit l'état de mouvement du système, il ne serait pas convaincu. Nous avons déjà insisté sur le fait que l'accélération a une sorte de réalité physique absolue.

Il est donc clair que, dans un système non galiléen, le principe de relativité précédemment étudié ne s'applique pas tel quel. La suite nous montrera que la généralisation du principe nécessite l'introduction, dans chaque système, d'un champ de force — appelé par Einstein champ de gravitation — particulier à ce système; c'est précisément ce champ qui se manifeste par les effets

---

(1) A.-S. Eddington, *Space Time and Gravitation.* Traduction française par Jacques Rossignol, p. 109 (1921).

mécaniques de l'accélération. Le système galiléen correspond au cas particulier où ce champ disparaît.

55. L'équivalence entre un champ de gravitation et un champ de force dû à un état de mouvement accéléré [1].

Nous allons commencer par l'analyse de notions qui nous paraissent évidentes parce que nous y sommes habitués, et c'est précisément parce que nous y sommes trop habitués que personne, avant Einstein, n'avait eu l'idée de les approfondir.

1° *La gravitation doit être une action de proche en proche.* — A la question « pourquoi un objet soulevé et abandonné à lui-même tombe-t-il »? chacun est tenté de répondre : parce qu'il est attiré par la Terre. La physique moderne doit formuler la réponse d'une façon différente.

Le développement, dans le domaine de l'électromagnétisme, de la théorie des actions de proche en proche non instantanées a conduit à la théorie de Maxwell et au principe de relativité restreint. Une conception semblable doit être admise pour la gravitation. L'attraction de la Terre sur l'objet qui tombe n'est, en somme, qu'une apparence, car la Terre agit indirectement sur l'objet. D'une façon générale, toute matière ou toute énergie détermine dans son voisinage les propriétés de l'Espace-Temps, produit une modification de l'Espace-Temps qui se manifeste à nous par ce que nous appelons un champ de gravitation. La propriété d'agir sur un objet, ou sur une onde électromagnétique, appartient à l'Espace-Temps modifié par le voisinage de matière ou d'énergie; ce n'est pas une action à distance directe et instantanée produite par un corps attirant.

2° *L'égalité de la masse pesante et de la masse inerte.* — Le champ de gravitation possède une propriété excessivement remar-

---

[1] A. Einstein, *La théorie de la relativité restreinte et généralisée mise à la portée de tout le monde.* Traduction par Mlle Rouvière, p. 54 et suivantes.

quable, qui n'appartient pas aux champs électrique et magnétique. Alors que dans un même champ électrique des charges différentes prennent des accélérations différentes, dans un même champ de gravitation l'accélération acquise par un corps ne dépend pas de la nature du corps. Tous les corps, qu'ils soient lourds ou légers, tombent avec la même vitesse si les conditions initiales sont les mêmes.

Ainsi, dans un champ de gravitation, l'accélération est indépendante de la force qui s'exerce sur le corps.

Ce fait, si familier, est extraordinaire. Nous allons, avec Einstein, le formuler autrement.

D'après la loi du mouvement, on a (pour les faibles vitesses) :

$$\text{force} = \text{masse inerte} \times \text{accélération},$$

c'est-à-dire que la masse inerte (masse au repos) est caractéristique du corps accéléré.

Si la force est le poids du corps, on a :

$$\text{force} = \text{masse pesante} \times \text{intensité du champ de la pesanteur}.$$

La masse pesante étant également une caractéristique du corps. Il suit de là :

$$\text{accélération} = \frac{\text{masse pesante}}{\text{masse inerte}} \times \text{intensité du champ}.$$

Puisque l'expérience prouve que, dans un même champ de pesanteur, l'accélération est indépendante du corps, le rapport $\frac{\text{masse pesante}}{\text{masse inerte}}$ est une constante indépendante de la nature du corps et si l'on choisit les unités de façon que ce rapport soit égal à l'unité, la masse pesante est égale à la masse inerte et d'autre part l'accélération est égale à l'intensité du champ.

Il y a longtemps que la mécanique a *enregistré* ce résultat, mais personne ne l'avait *interprété*. L'interprétation est celle-ci : la même qualité d'un corps se manifeste selon les circonstances, soit comme inertie, soit comme pesanteur; en termes plus précis : LA FORCE DE GRAVITATION EST UNE FORCE D'INERTIE.

Imaginons une portion d'Univers vide, si loin des étoiles et de toute matière que nous soyons dans le cas idéal où la loi gali-

léenne d'inertie est applicable. Il est alors possible, dans cette portion d'Univers, de choisir un système galiléen S relativement auquel des points immobiles restent au repos, des corps en mouvement sur lesquels n'est appliquée aucune force sont animés d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Dans ce système galiléen S, supposons une chambre isolée, dans laquelle se trouve un observateur muni d'appareils; pour cet homme, il n'y a pas de pesanteur, pas de direction privilégiée.

Par un câble attaché à un crochet fixé au milieu de la toiture de la chambre, un être extérieur se met à tirer avec une force constante. Pour un observateur immobile dans le système galiléen S, la chambre commence à être animée d'un mouvement uniformément accéléré et sa vitesse croît d'une façon fantastique. Toute autre sera l'opinion de l'homme enfermé dans la chambre. L'accélération va projeter cet homme sur le plancher; pour lui, il y aura un « haut » et un « bas », comme dans une chambre sur la Terre; il constatera la loi de la chute des corps, tous les objets ayant la même accélération; sa première impression sera qu'il se trouve dans un champ de gravitation.

Cependant, à la réflexion, il sera étonné des effets observés car la chambre devrait tomber en chute libre dans le champ de gravitation, ce qui ferait disparaître la pesanteur. Cherchant ce qui se passe, il découvrira le crochet et le câble tendu : cette fois tout sera clair pour lui, il se dira : ma chambre est suspendue, *au repos*, dans un champ de gravitation.

Cet homme est-il dans l'erreur? nullement, car son interprétation est conforme aux lois de la Mécanique. Alors nous pouvons, comme lui, considérer la chambre comme immobile, bien qu'elle soit accélérée relativement à l'espace galiléen S; la possibilité de cette conception repose sur la propriété fondamentale d'un champ de gravitation de donner à tous les corps la même accélération, c'est-à-dire repose sur l'égalité de la masse pesante et de la masse inerte.

Supposons maintenant qu'à l'intérieur de la chambre, l'homme suspende un corps au bout d'une corde, c'est-à-dire constitue un pendule : la corde se tendra et prendra une direction bien déterminée qui sera « la verticale ». L'homme estimera que la tension de la corde équilibre le poids du corps, que cette tension est

déterminée par la masse pesante. Mais, d'autre part, un observateur du système galiléen S jugera de la façon suivante : la corde est forcée d'accompagner la chambre dans son mouvement accéléré et transmet ce mouvement au corps suspendu : la tension équilibre la force d'inertie, elle est déterminée par la masse inerte.

3° *Le boulet de Jules Verne.* — Au lieu d'imaginer que la chambre de l'observateur est loin de toute matière, supposons-la, au contraire, lancée sans rotation et se mouvant *en chute libre* dans le champ de gravitation d'un astre; la pesanteur y sera supprimée puisque, dans ce champ, la chambre et tous les objets qu'elle contient seront soumis à une même accélération d'ensemble. Pour l'observateur de la chambre il n'y aura ni haut ni bas, et un mobile libre sera au repos ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme; la lumière à l'intérieur ou dans le voisinage de la chambre se propagera en ligne droite. En résumé, un système de référence lié à la chambre en chute libre sera un système galiléen (bien que pour un observateur de l'astre sur lequel tombe la chambre le système soit accéléré), et l'homme de la chambre considérera l'Univers comme euclidien dans son voisinage.

4° *Le principe d'équivalence.* — Il résulte des considérations qui précèdent que, d'une part, l'emploi d'un système de référence en mouvement équivaut à créer un certain champ de gravitation dans lequel ce système pourra être considéré comme immobile; que, d'autre part, l'emploi d'un système de référence lié à un corps en chute libre dans un champ de gravitation revient à supprimer ce champ.

Dans toute portion d'espace il est impossible de se prononcer entre les deux interprétations suivantes : 1° il existe un état de mouvement, non uniforme, sans champ de gravitation ; 2° le système envisagé est au repos, mais il règne dans la région considérée un champ de gravitation s'exerçant sur toute portion d'énergie.

Il est donc impossible de distinguer un champ de force d'inertie dû à un état de mouvement et un champ de gravitation. Il y a *équivalence*, selon l'expression d'Einstein.

Cette conception est en plein accord avec un fait bien connu : nous avons déjà dit, à propos des expériences d'Eotvös (n° 53)

que la verticale est déterminée par la résultante du champ de la pesanteur et du champ de force centrifuge due à la rotation de la Terre. Ces deux constituants du champ terrestre interviennent au même titre dans tous les phénomènes sensibles à leur action. Tout se passe pour un système de référence en rotation comme s'il était en translation dans un champ de gravitation distribué comme le champ de force centrifuge.

56. L'Univers réel n'est pas euclidien.

Pour un observateur en chute libre, dans un boulet de Jules Verne, le champ de gravitation disparaît; mais il est essentiel de remarquer que c'est seulement dans une région peu étendue (théoriquement infiniment petite) que l'Univers est euclidien pour cet observateur. Le champ de gravitation existe à distance, car l'intensité de la pesanteur n'est constante ni en grandeur, ni en direction. En supprimant le champ en un point, on l'accentue ailleurs : par exemple, relativement à l'observateur qui tombe en chute libre sur la Terre, le champ de la pesanteur est doublé dans la région symétrique par rapport au centre de la Terre.

Aucun champ de gravitation produit par la matière n'est uniforme; aucun système de référence ne peut annuler un champ de gravitation dans toute son étendue : on ne peut supprimer un champ que localement.

L'Univers réel, envisagé dans son ensemble, n'est donc pas euclidien.

CHAPITRE XII.

LA THÉORIE DES SURFACES DE GAUSS ET SON EXTENSION A UNE MULTIPLICITÉ POSSÉDANT QUATRE DIMENSIONS.

Nous avons donné un énoncé du principe de relativité généralisé et nous avons dit pour quelle raison cette généralisation s'impose; nous pouvons maintenant comprendre comment il faudra l'exprimer.

Choisir un système de référence arbitraire, ou faire une transformation arbitraire de coordonnées, c'est introduire un état de mouvement arbitraire ou, d'après le principe d'équivalence, un champ de gravitation arbitraire. Par conséquent, les lois qui régissent les phénomènes physiques doivent contenir, implicitement ou explicitement, sous la forme la plus générale, les grandeurs qui caractérisent un champ de gravitation.

Le principe de relativité exige que *les équations qui expriment ces lois conservent leur forme dans un champ de gravitation quelconque*.

Cette condition d'invariance, ou plus exactement de covariance, limite considérablement les formes possibles pour les lois de la Nature.

57. Les longueurs et le temps dans un champ de gravitation.

L'influence d'un champ de gravitation sur la marche des horloges et sur la mesure des longueurs dépend du champ envisagé ou, ce qui revient au même, de l'état de mouvement équivalent. Nous allons prendre un exemple simple [1].

Imaginons un système S en chute libre, par conséquent localement

[1] A. Einstein, *La théorie de la relativité restreinte et généralisée mise à la portée de tout le monde*, p. 68.

galiléen; dans ce système S, les résultats de la théorie de la relativité restreinte sont applicables. Prenons un second système S′ formé par un disque plan dont le mouvement, par rapport à S, est une rotation autour d'un axe normal au plan du disque, passant par le centre de ce disque et fixe dans le système S. Un observateur situé excentriquement éprouve l'action d'une force qui agit radialement vers l'extérieur; cette force est interprétée par un observateur du système galiléen S comme un effet d'inertie : c'est la force centrifuge. Mais, d'autre part, l'observateur entraîné avec S′ doit considérer son disque comme un corps de référence immobile et doit interpréter la force qui agit sur lui et sur les corps au repos par rapport au disque comme l'effet d'un certain champ de gravitation. Il est à peine besoin de faire remarquer que ce champ de force possède une structure qui n'a aucun rapport avec celle du champ de gravitation au voisinage d'une masse attirante, mais conformément à la généralisation à laquelle nous autorise le principe d'équivalence, nous appelons quand même ce champ un champ de gravitation ou, si l'on préfère, un champ de gravitation géométrique.

L'observateur de S′ prend deux horloges identiques marquant toujours la même heure tant qu'elles restent au même point. Il place l'une au centre du disque et transporte l'autre en un point du disque à la distance r du centre; les deux horloges sont immobiles dans le système S′ du disque; vont-elles rester synchrones? certainement non. Examinons-les, en effet, du système galiléen S : celle qui est au centre n'a pas de vitesse, l'autre est en mouvement : nous savons que cette dernière va marcher plus lentement. Cet effet sera constaté par l'observateur du disque, car il s'agit d'un effet bien réel et non d'une apparence, le temps propre τ au point situé à la distance r du centre étant plus court que le temps t du système galiléen qui est le temps au centre :

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}\, dt,$$

de sorte qu'au bout de quelque temps, en ramenant l'horloge du point r au centre du disque, l'observateur constatera qu'elle est en retard sur celle qui est restée au centre.

A chaque distance r correspond un temps propre; c'est dire

qu'il n'y a aucune synchronisation possible pour l'observateur du système S′; il n'y a pas un temps unique valable pour le système S′ du disque.

Cet exemple fait comprendre que, d'une façon générale, dans un système immobile dans un champ de gravitation, équivalent à un système accéléré par rapport à un système galiléen, il n'y a plus de définition possible du temps pour le système tout entier, plus de mesure possible par des horloges synchrones, car chaque point possède son temps propre.

La définition des coordonnées spaciales présente de même des difficultés insurmontables si l'on s'en tient aux coordonnées de la géométrie euclidienne. Reprenons l'exemple du disque tournant. Imaginons qu'en appliquant sur la périphérie du disque une règle très courte prise pour unité de longueur, on marque deux points A et B, et que le rayon soit mesuré avec la même règle. Un observateur placé au centre appartient au système galiléen, puisque le centre est immobile; cet observateur peut donc appliquer les résultats de la relativité restreinte : D'une part, pour cet observateur, le rayon du disque n'est pas changé par la rotation, car les rayons sont normaux à la vitesse; d'autre part, l'unité de longueur AB, qu'il voit passer sur la périphérie lui paraît plus courte que si le disque ne tournait pas (contraction de Lorentz-Einstein); l'observateur du centre est donc conduit à considérer la circonférence comme contenant l'unité de longueur un plus grand nombre de fois que si le disque était immobile dans le système galiléen; il trouve que le rapport de la circonférence au diamètre est supérieur au nombre π, et le rapport qu'il obtient est d'autant plus grand, pour une même vitesse angulaire, que le rayon de la circonférence est plus grand. La géométrie de ce disque n'est donc pas euclidienne.

D'une façon générale, pour un système au repos dans un champ de gravitation, on ne peut plus définir les coordonnées spaciales x, y, z comme on le fait en géométrie euclidienne. La notion même de ligne droite perd sa signification.

Il semble que, par ces difficultés, toute la théorie de la relativité soit remise en question, car tant que les coordonnées des événements ne sont pas définies, on ne voit plus quel sens attribuer aux lois de la Nature.

Einstein a résolu le problème par une admirable extension de la théorie des surfaces de Gauss.

58. Les surfaces et les coordonnées de Gauss.

Supposons une surface qui ne soit ni plane ni développable sur un plan. Dans une multiplicité à deux dimensions seulement, c'est-à-dire si l'on s'interdit de considérer, entre deux points de la surface, un chemin de traverse dans l'espace extérieur, cette surface est un univers non euclidien ([1]).

Gauss a montré qu'il est possible d'énoncer les lois de la géométrie de ces surfaces sous une forme indépendante du système de coordonnées. On comprend, dès à présent, qu'en ajoutant deux dimensions, on pourra, par une généralisation de la théorie de Gauss, énoncer les lois géométriques de l'Univers non euclidien à quatre dimensions.

Gauss est parti de l'idée qu'il doit être possible, par des opérations de géodésie sur la surface, de mettre en évidence la courbure de la surface en faisant simplement des opérations *locales* d'arpentage, par les procédés habituels, en appliquant la géométrie euclidienne du plan. En effet, en tout point de la surface, il y a un plan tangent et, dans une étendue limitée, la surface peut être confondue avec son plan tangent; ceci est d'autant plus exact que l'étendue envisagée est plus petite, et devient rigoureux pour une étendue infiniment petite.

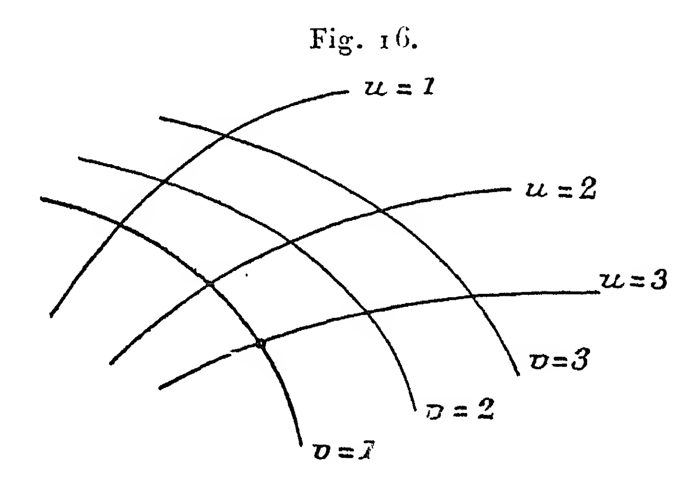
Traçons sur la surface une famille de courbes arbitraires u; désignons chacune de ces courbes par un chiffre et figurons les courbes $u = 1$, $u = 2$, ...; entre deux de ces courbes, on peut imaginer une infinité de courbes représentant tous les nombres compris entre les deux nombres entiers qui désignent les deux courbes envisagées. Les courbes sont assujetties à la condition essentielle de ne pas se couper, de façon qu'il ne passe qu'une courbe u par chaque point. Donc, à chaque point de la surface correspond une coordonnée u bien déterminée. Traçons de même

---

([1]) Il est euclidien dans l'espace à trois dimensions.

une seconde famille de courbes v, les courbes v coupant les courbes u. Chaque point a ainsi deux coordonnées u et v.

Fig. 16.



Deux points P et P′ infiniment voisins ont pour coordonnées respectives u, v; $u + du$, $v + dv$. Les coordonnées de Gauss reviennent, en somme, à la coordination de deux nombres, la correspondance avec les points de la surface étant univoque et telle que deux points infiniment voisins soient représentés par des nombres infiniment peu différents.

Dans une étendue infiniment petite autour d'un point P, on peut confondre la surface avec son plan tangent et les courbes avec leurs tangentes; on est donc ramené, en chaque point, à un système de coordonnées rectilignes, mais obliques; la distance ds du point P à un point infiniment voisin P′ est

$$(1\text{-}12)\quad \begin{cases} ds^2 = g_{11}\,du^2 + g_{12}\,du\,dv + g_{21}\,dv\,du + g_{22}\,dv^2, \\ = g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2, \quad \text{car} \quad g_{12} = g_{21}. \end{cases}$$

Si l'on s'est donné les courbes u et v, on peut, en chaque point P, mesurer avec des règles les distances au point P $\delta' s$, $\delta'' s$, $\delta''' s$ de trois points P′, P″, P‴ extrêmement voisins de ce point, correspondant à des valeurs connues des δu et δv. δs pouvant être pratiquement confondu avec ds, δu et δv confondus avec du et dv, on a trois équations permettant de calculer les g, qui sont ainsi déterminés par des mesures d'arpentage.

Les $g_{\mu\nu}$ (μ, $\nu = 1, 2$) *sont constants en chaque point*, conformément à la géométrie euclidienne ordinaire, c'est-à-dire qu'ils sont indépendants des points P′, P″, P‴ choisis pour les mesures d'arpentage.

Mais, *d'un point* P *à un autre, les* g *sont variables; ce sont*

fonctions de u et de v. C'est seulement dans le cas d'une sur- euclidienne qu'on peut trouver des courbes u et v telles on ait *en tout point*

$$(2) \qquad ds^2 = du^2 + dv^2, \qquad g_{11} = g_{22} = 1, \qquad g_{12} = g_{21} = 0.$$

C'est précisément la possibilité d'un tel choix qui est caracté- ée par le mot « euclidien ». Sur le plan, les courbes u et v iennent ainsi des droites rectangulaires.

Dans le cas général, les $g_{\mu\nu}$ étant en chaque point des fonctions u et de v, l'arpentage permet de connaître ces fonctions. Gauss montré que la géométrie de la surface est alors entièrement erminée, et que *les lois de cette géométrie s'expriment d'une çon indépendante des coordonnées.*

Les lignes de plus courte distance se nomment *géodésiques*. longueur d'une ligne quelconque entre deux points P_1, P_2 $\int_{P_2}^{P_1} ds$. Cette ligne est minimum si la longueur des lignes infini- nt voisines de la ligne considérée est constante, puisqu'une action est constante aux environs d'un minimum (ou d'un ximum); une géodésique rend donc stationnaire la valeur de ntégrale $\int ds$, ce qu'on écrira

$$(2) \qquad \delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0.$$

En géométrie plane, les géodésiques sont des droites. En géo- étrie sphérique, non euclidienne si l'on ne considère que les ux dimensions de la surface, ce sont des arcs de grands cercles.

D'une façon générale, si l'on exprime $\delta \int ds = 0$, on est conduit une équation différentielle qui fait intervenir u, v $\frac{du}{ds}$ $\frac{dv}{ds}$. *Quand change de système de coordonnées, l'équation différen- elle garde la même forme à condition que les $g_{\mu\nu}$ aient les uvelles valeurs correspondant aux nouvelles coordonnées. es propriétés des géodésiques se trouvent donc exprimées us une forme indépendante du système de coordonnées.*

On peut aller plus loin et caractériser l'individualité de la sur- ce; il existe, en effet, une grandeur qui s'exprime au moyen

des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées premières et secondes : *cette grandeur est un invariant, c'est-à-dire a une valeur numérique indépendante du système de référence employé : c'est la courbure totale*

$$R = \frac{1}{R_1 R_2},$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux. La courbure totale est une caractéristique de la surface en chaque point.

Pour un plan, on a en tout point $R = 0$.

Si $R = \text{const.} < 0$, on obtient les lois de la Géométrie de Lobatchefsky.

Si $R = \text{const.} > 0$, on a la Géométrie de Riemann (sphère).

59. Vue d'ensemble de la théorie d'Einstein.

La compréhension de la théorie d'Einstein sera facilitée en indiquant, dès le début, les idées générales.

On peut étendre la théorie de Gauss à un nombre de dimensions plus grand. Avec deux dimensions de plus, ce qui est le cas de l'Univers quadridimensionnel, on pourra confondre, en chaque point-événement, dans un domaine quadridimensionnel infiniment petit, l'Univers réel avec l'*Univers de Minkowski tangent*, comme en géométrie des surfaces on confond localement la surface avec son plan tangent.

Dans l'Univers euclidien tangent, le principe de relativité restreint s'applique. Cet Univers tangent est localement celui de l'observateur du boulet de Jules Verne, en chute libre, pour qui la loi galiléenne d'inertie est exacte dans son voisinage immédiat.

L'invariant fondamental, l'intervalle d'Univers entre deux événements infiniment voisins est mis sous la forme suivante, qui est l'extension de (1-12) :

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2 g_{12}\, dx_1\, dx_2 + 2 g_{13}\, dx_1\, dx_3 + \ldots + g_{44}\, dx_4^2.$$

Il n'y a plus ici ni longueurs ni temps, x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre variables, quatre coordonnées d'Univers.

Les $g_{\mu\nu}$ sont les grandeurs caractéristiques du champ de gravitation, au sens généralisé conformément au principe d'équi-

valence (n° 55); ce sont ces grandeurs, les dix *potentiels* de gravitation, qui doivent figurer dans l'expression des lois des phénomènes, pour que ces lois conservent la même forme, quel que soit le système de référence (n° 54).

Dans un Univers euclidien, l'équation générale des géodésiques est, comme nous l'avons vu dans l'étude de l'Univers de Minkowski,

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\,dt^2} = 0, \tag{4-12}$$

x, y, z étant les coordonnées d'espace rapportées à trois axes rectangulaires et t le temps. Nous désignerons dorénavant par *coordonnées galiléennes* les coordonnées d'espace et de temps définies par

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\,dt^2$$

ou

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2.$$

Cette définition n'est possible que dans un Univers euclidien, et le mot *galiléen* a un sens plus spécial que le mot *euclidien*, puisque le système de coordonnées dit *galiléen* correspond à un choix particulier (trois axes rectangulaires d'espace en mouvement non accéléré) dans un Univers euclidien.

La géodésique (4-12) est l'extension quadridimensionnelle de la droite de la géométrie, et son équation est l'expression de la loi galiléenne d'inertie.

Dans l'Univers réel, et quelles que soient les coordonnées, une géodésique sera encore représentée par l'équation

$$\delta \int ds = 0 \tag{5-12}$$

qui exprime la loi d'action stationnaire.

Un champ de gravitation, au sens généralisé, comporte un élément arbitraire, puisqu'on peut modifier à volonté le champ de force « géométrique » par le choix des coordonnées [1]. Cependant tout n'est pas arbitraire : il y a un élément bien déterminé, la *structure géométrique* (quadridimensionnelle) de l'Espace-

[1] L'élément arbitraire lié à l'indétermination des coordonnées est compa-

Temps en chaque point-événement. Les intervalles *ds* séparant un point d'Univers des points infiniment voisins, intervalles indépendant de tout système de coordonnées, sont des invariants et caractérisent la configuration de l'Espace-Temps, comme en géométrie les distances permettent la description complète d'une figure indépendamment de son orientation; un autre invariant est la courbure totale, extension de la courbure de Gauss; enfin les géodésiques ont une existence absolue.

Puisque, dans le champ de gravitation d'un astre, tous les corps tombent avec la même vitesse, malgré leurs poids différents, il faut porter son attention, non sur la prétendue « force attractive » qui est variable avec le corps, mais sur l'état de mouvement, c'est-à-dire sur la ligne d'Univers qui, étant la même pour tous les corps placés dans les mêmes conditions initiales, doit être une caractéristique de l'Univers lui-même.

Dès lors, il ne faut plus dire : la force de gravitation est une force attractive; un corps abandonné à lui-même dans un champ de gravitation n'est pas libre et ne suit pas la loi d'inertie parce qu'il subit une force appliquée. Il faut dire : un corps abandonné à lui-même est toujours un mobile libre et se meut suivant la loi d'inertie, la loi d'action stationnaire; mais cette loi n'est plus celle de Galilée, parce que les lignes d'Univers naturelles, ou géodésiques (5-12) de l'Univers non euclidien, ne sont pas des « droites d'Univers ».

L'expérience prouve que les propriétés et la configuration de l'Espace-Temps sont liées à la présence ou au voisinage de la matière, et plus généralement, de l'énergie. La déformation de l'Espace-Temps entraîne une courbure des lignes d'Univers des mobiles libres, des géodésiques, et cette courbure se manifeste à nous par l'existence d'une force d'inertie qui nous a donné l'illusion d'une force attractive appliquée, parce que, en fait, elle se traduit à nos yeux par une telle apparence.

Il importe de noter que la déformation de l'Espace-Temps ne doit pas être considérée comme la *cause* de la gravitation. Entre la structure de l'Univers et la gravitation, il n'y a pas de lien de causalité, car c'est une seule et même chose. Les phénomènes de gravitation sont simplement des manifestations de la déformation qui existe en présence ou au voisinage de la matière, qui est sou-

mise à une loi découverte par Einstein, mais dont la cause première reste un profond mystère.

60. Transformations de coordonnées.

Dans un système localement euclidien (chute libre), le principe restreint est applicable dans un domaine suffisamment petit. Soient donc X_1, X_2, X_3 les coordonnées d'espace par rapport à des axes rectangulaires quelconques, $X_4 = ct$ la coordonnée de temps. L'intervalle entre deux événements infiniment voisins

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{6-12}$$

est indépendant de l'orientation des axes choisis, et est mesurable dans le système avec des règles et des horloges.

X_1, X_2, X_3, X_4 sont des coordonnées galiléennes. Introduisons maintenant de nouvelles coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, fonctions des anciennes : inversement, les anciennes coordonnées sont des fonctions des nouvelles variables x_μ :

$$X_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4); \qquad X_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad \ldots.$$

On en déduit

$$dX_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4} dx_4, \qquad \ldots. \tag{7-12}$$

Substituant dans (6-12), ds^2 prend la forme d'une fonction quadratique des dx_μ :

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11}\, dx_1^2 + g_{22}\, dx_2^2 + g_{33}\, dx_3^2 + g_{44}\, dx_4^2 \\ & + 2 g_{12}\, dx_1\, dx_2 + 2 g_{13}\, dx_1\, dx_3 + 2 g_{14}\, dx_1\, dx_4 \\ & + 2 g_{23}\, dx_2\, dx_3 + 2 g_{24}\, dx_2\, dx_4 + 2 g_{34}\, dx_3\, dx_4. \end{aligned} \tag{8-12}$$

Les $g_{\mu\nu}$ sont des fonctions des coordonnées, dépendant de la transformation

$$g_{\mu\nu} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\frac{\partial f_2}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_3}{\partial x_\mu}\frac{\partial f_3}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_4}{\partial x_\mu}\frac{\partial f_4}{\partial x_\nu}.$$

La forme de l'expression (8-12) n'est pas modifiée par une

nouvelle transformation de coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) et l'on peut trouver facilement les valeurs des $g'_{\mu\nu}$ en fonction des $g_{\mu\nu}$.

Les $g_{\mu\nu}$ peuvent être groupés dans le tableau

$$(9\text{-}12)\qquad \left\{\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{matrix}\right.$$

Les seize $g_{\mu\nu}$ se réduisent à dix, puisque $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Dans le cas de coordonnées galiléennes, on a

$$(10\text{-}12)\qquad \left\{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right.$$

Nous écrirons l'expression (8-12) sous la forme

$$(11\text{-}12)\qquad ds^2 = \Sigma\, g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu.$$

Comme exemple, faisons la transformation permettant de passer des coordonnées galiléennes X_1, X_2, X_3, X_4 à des coordonnées rapportées à des axes qui, dans le système galiléen, tournent autour de OX_3 avec la vitesse angulaire ωc. Les formules de transformation sont les suivantes :

$$(12\text{-}12)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= x_1 \cos\omega x_4 - x_2 \sin\omega x_4, \\ X_2 &= x_1 \sin\omega x_4 + x_3 \cos\omega x_4, \\ X_3 &= x_3, \\ X_4 &= x_4. \end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$(13\text{-}12)\qquad \left\{\begin{aligned} dX_1 &= \cos\omega x_4\, dx_1 - \sin\omega x_4\, dx_2 - \omega(x_1 \sin\omega x_4 + x_2 \cos\omega x_4)\, dx_4, \\ dX_2 &= \sin\omega x_4\, dx_1 + \cos\omega x_4\, dx_2 + \omega(x_2 \cos\omega x_4 - x_2 \sin\omega x_4)\, dx_4, \\ dX_3 &= dx_3, \\ dX_4 &= dx_4. \end{aligned}\right.$$

Substituant dans (6-12), on a l'expression de l'invariant ds^2 en fonction des dx_μ :

$$\begin{aligned} ds^2 = &- dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + [1 - \omega^2(x_1^2 + x_2^2)]\, dx_4^2 \\ &+ 2\omega x_2\, dx_1\, dx_4 - 2\omega x_1\, dx_2\, dx_4. \end{aligned}$$

Le tableau des $g_{\mu\nu}$ est le suivant :

$$(14\text{-}12)\qquad \begin{cases} -1 & 0 & 0 & \omega x_2 \\ 0 & -1 & 0 & -\omega x_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \omega x_2 & -\omega x_1 & 0 & 1-\omega^2(x_1^2+x_2^2) \end{cases}$$

Un point matériel libre décrit dans le système euclidien une droite d'un mouvement uniforme ; sa ligne d'Univers est $\delta\int ds = 0$. Son mouvement n'est évidemment pas changé par le fait qu'on prend de nouvelles coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 et l'on a toujours $\delta\int ds = 0$. Mais, dans le nouveau système de coordonnées, les $g_{\mu\nu}$ ne sont plus des constantes, ce sont des fonctions des x_μ ; il en résulte que, dans le système des x_μ, la géodésique devient courbe, le mouvement du point matériel n'apparaît plus comme rectiligne et uniforme. Nous attribuons alors la courbure de la géodésique à un champ de force, à un champ de gravitation (au sens généralisé) qui se manifeste dans le nouveau système ; ce champ est complètement déterminé par les $g_{\mu\nu}$ puisque le mouvement du point matériel libre, *indépendant de la nature du point matériel*, ne dépend que de ces grandeurs. Nous voyons que *l'apparition d'un champ de gravitation est liée à la variation des* $g_{\mu\nu}$.

Dans l'exemple que nous avons choisi, nous remarquons que

$$g_{44} = 1 + \frac{2\Omega}{c^2}$$

où

$$\Omega = -\frac{1}{2}\omega^2 c^2(x_1^2 + x_2^2)$$

est le potentiel de la force centrifuge (ωc étant la vitesse de rotation). Par analogie, tous les $g_{\mu\nu}$ sont regardés comme les « composantes » du potentiel généralisé du champ de gravitation.

Nous avons déjà remarqué (n° 59) que dans le cas général d'une transformation arbitraire, les x_μ ne sont plus ni des longueurs, ni un temps ; ce sont des « coordonnées d'Univers ». Ainsi, dans l'exemple très particulier que nous venons de donner, x_4 n'est pas « le temps » du système tournant : il n'y a pas de temps défini pour ce système tout entier, comme nous l'avons précédemment montré (n° 57).

On voit que la méthode suivie est calquée sur celle de Gauss,

avec deux dimensions de plus. Au lieu des deux familles de courbes u et v, on a quatre familles d'« espaces » tridimensionnels $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_4$, $x_1x_3x_4$, $x_2x_3x_4$; en chaque point d'Univers, ou événement, se coupent quatre espaces.

Il ne faudrait pas croire qu'une pareille coordination n'ait pas de sens, les coordonnées ne signifiant plus rien (dans le cas général) au point de vue des longueurs et du temps. Nous avons, en effet, insisté sur le fait, qui est la base même de la généralisation du principe de relativité, que les réalités physiques correspondent aux rencontres de lignes d'Univers de points substantiels. Ces rencontres s'expriment par des valeurs communes des coordonnées, quel que soit le choix de ces coordonnées; tous les systèmes sont donc également bons pour exprimer les lois de la Nature, et la description de l'Univers peut se faire en coordonnées arbitraires, tout comme la géométrie des surfaces; peu importe que ces coordonnées ne soient ni des longueurs ni des temps. Le principe de relativité généralisé peut s'énoncer : *Tous les systèmes de Gauss (étendus à quatre dimensions) sont, en principe, équivalents pour formuler les lois de la Nature.*

Veut-on cependant conserver les notices d'espace et de temps? On peut le faire. Dans un système galiléen, c'est-à-dire où n'existerait pas de champ de gravitation, on pourrait prendre un corps de référence rigide par rapport auquel on repérerait les longueurs, et des horloges synchrones qui mesureraient le temps. Dans un champ de gravitation, il n'y a plus de corps rigides ni d'horloges synchrones : on envisagera alors comme corps de référence des corps non rigides auxquels seront liées des horloges, ou si l'on veut un système formé d'un réseau à trois dimensions, avec des horloges aux nœuds du réseau pour donner l'heure dans chaque cellule. De pareils corps de référence, qui non seulement sont en mouvement, mais changent de forme dans le champ de gravitation sont les « mollusques » d'Einstein. Le mollusque est équivalent à un système de Gauss, mais on conserve l'espace et le temps, chaque point du mollusque étant considéré comme point d'espace, chaque point matériel immobile par rapport à lui étant considéré comme au repos, tant que ce mollusque sert de système de référence.

CHAPITRE XIII.

NOTIONS DE CALCUL TENSORIEL [1]

S'il est légitime d'employer des coordonnées arbitraires, quelle peut être leur utilité et quel but poursuivons-nous ?

Nous cherchons comment, conformément au principe de relativité généralisé, la covariance des équations de la Physique peut être obtenue ; et si, dans l'Univers réel, nous reconnaissons que les potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$ doivent être assujettis à certaines relations, ces relations exprimeront la loi générale de la gravitation.

Dans la théorie de la relativité généralisée, l'invariant ds joue un rôle fondamental. On est conduit, de plus, à envisager des êtres mathématiques appelés *tenseurs;* chacun d'eux est défini par un certain nombre de fonctions qui sont dites « composantes du tenseur ». Le « calcul différentiel absolu », créé par Riemann, Christoffel, Ricci et Levi-Civita (antérieurement à la théorie d'Einstein) donne les règles permettant de calculer les composantes d'un tenseur dans un nouveau système de coordonnées lorsqu'on connaît ces composantes pour un premier système, et lorsque, bien entendu, la transformation qui relie les deux systèmes est donnée.

Les tenseurs sont caractérisés par le fait que les équations de transformation de leurs composantes sont linéaires et homogènes : si toutes les composantes d'un tenseur sont nulles dans un système de coordonnées, elles disparaissent aussi dans tous les autres systèmes. *Une loi naturelle formulée par l'annulation d'un tenseur, ce qui veut dire par l'annulation de toutes les composantes d'un tenseur, ou formulée par l'égalité de deux ten-*

---

[1] D'après Einstein (*Ann. d. Physik*, 1916, p. 49) et Eddington (*Report on the relativity theory of gravitation*, 1920; *Espace, Temps et Gravitation*, édition française, traduction par Jacques Rossignol, 1921).

seurs, est covariante d'une façon générale : elle est donc mise sous la forme exigée par le principe de relativité.

En cherchant les règles d'après lesquelles on peut former des tenseurs, on obtient les moyens d'exprimer les lois de la Physique sous une forme intrinsèque, où tout système de coordonnées a disparu.

61. Quadrivecteurs contrevariants et quadrivecteurs covariants.

Quadrivecteurs contrevariants. — Passons d'un système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) à un autre système (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4).

L'élément de ligne, défini par ses quatre « composantes » dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 est transformé selon les équations

$$\left.\begin{array}{l} dx'_1 = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_4} dx_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \text{(4 équations)}$$

qu'on peut résumer sous la forme abrégée

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu, \tag{1-13}$$

σ étant *le même* indice 1, ou 2, ou 3, ou 4 dans les deux membres, et la sommation étant faite, pour chaque indice σ, en remplaçant successivement ν par 1, 2, 3, 4. L'expression (1-13) représente donc les 4 équations qu'on obtient en faisant successivement $\sigma = 1, 2, 3, 4$, et dans chacune de ces équations la sommation est faite par rapport à ν.

Tout groupe de quatre quantités A^ν (de mêmes dimensions physiques) qui se transforment suivant la même loi que les dx_ν, c'est-à-dire telles que

$$A'^\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu \tag{2-13}$$

constitue *par définition* un *quadrivecteur contrevariant*, ou *tenseur contrevariant de premier ordre.*

On a pris l'habitude de placer l'indice en haut (A^σ) pour syn-

thétiser les quatre composantes d'un quadrivecteur contrevariant, sauf cependant pour dx_σ qui, bien que contrevariant, est écrit avec indice en bas.

Il est évident que si A^σ et B^σ sont les composantes de quadrivecteurs contrevariants, il en est de même de $(A^\sigma \pm B^\sigma)$ (même indice σ pour A et pour B dans chaque composante).

Quadrivecteurs covariants. — Quatre grandeurs A_ν (indice en bas) sont appelées *composantes d'un quadrivecteur ou tenseur de premier ordre covariant* si, B^ν étant un quadrivecteur contrevariant arbitraire, on a

$$A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 + A_4 B^4 = \sum_\nu A_\nu B^\nu = \text{invariant}. \tag{3-13}$$

La loi de transformation des quadrivecteurs covariants résulte immédiatement de cette définition. Dans le second membre de l'équation

$$\sum_\sigma A'_\sigma B'^\sigma = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

remplaçons B^ν par l'expression obtenue en inversant l'équation (2-13), c'est-à-dire

$$B^\nu = \sum_\sigma \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} B'^\sigma,$$

nous obtenons

$$\sum_\sigma B'^\sigma A'_\sigma = \sum_\sigma B'^\sigma \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu$$

ou, puisque le quadrivecteur B'^σ est arbitraire,

$$A'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu. \tag{4-13}$$

Notation simplifiée. — On voit sur les équations qui précèdent que la sommation doit être faite en donnant successivement les valeurs 1, 2, 3, 4 *à celui des indices qui figure deux fois* sous le signe $\sum$, et que la sommation ne doit être faite que par rapport à cet indice qui se nomme *indice muet*.

L'indice muet n'a pas de signification propre, puisque dans la

sommation qui donne le développement complet de l'expression d'une seule et même composante, on doit lui attribuer successivement les valeurs 1, 2, 3, 4. La lettre qui désigne l'indice muet peut donc être à volonté remplacée par une autre lettre quelconque, pourvu que cette dernière lettre ne figure pas déjà dans le terme considéré : ainsi, au lieu de (4-13), on peut écrire

$$A'_\sigma = \sum_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} A_\alpha,$$

mais non

$$A'_\sigma = \sum_\sigma \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\sigma} A_\sigma.$$

Les remarques qui précèdent permettent de supprimer le signe $\sum$ sans nuire à la clarté de la notation. Il en sera de même dans la généralisation que nous allons faire : les indices muets sont faciles à reconnaître et il est sous-entendu qu'il faut sommer par rapport à chacun des indices muets.

62. Tenseurs de second ordre et d'ordres supérieurs.

Tenseurs contrevariants. — Formons les 16 produits $A^\mu B^\nu$ des composantes A^μ et B^ν de deux quadrivecteurs contrevariants

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu. \tag{5-13}$$

D'après (2-13) la loi de transformation de ces produits est

$$A'^{\sigma\tau} = \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu}$$

d'après la remarque faite plus haut, nous abrégeons l'écriture en supprimant les $\sum$ et nous écrivons simplement

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu}, \tag{6-13}$$

μ et ν sont les indices muets et nous savons que dans le développement complet de $A'^{\sigma\tau}$ il faudrait sommer en donnant succes-

sivement à chacun d'eux les valeurs 1, 2, 3, 4. On aurait

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_1}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_1}A^{11} + \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_1}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_2}A^{12} + \ldots + \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_2}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_1}A^{21} + \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_2}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_2}A^{22} + \ldots$$

ceci est l'expression d'une composante, correspondant à deux valeurs déterminées pour σ et τ, et pour écrire les 16 composantes, il faudrait donner successivement à σ et à τ les valeurs 1, 2, 3, 4; A'^{11}, A'^{12}, ...

Dans la suite nous n'emploierons plus que la notation abrégée telle que (6-13).

Revenons aux 16 produits (5-13) [$A^{\mu\nu}$ dans le premier système de coordonnées, $A'^{\sigma\tau}$ d'après (6-13) dans le second système]. Ils constituent les composantes d'un *tenseur contrevariant de second ordre.*

D'une façon générale, tout ensemble de 16 fonctions $A^{\mu\nu}$ qui se transforment suivant la loi précédente (6-13) forme un tenseur contrevariant de second ordre.

Un tel tenseur n'est pas nécessairement constitué, comme (5-13), par les produits des composantes de deux quadrivecteurs. On démontre que les 16 composantes $A^{\mu\nu}$ d'un tenseur sont les sommes des $A^\mu B^\nu$ de quatre paires de quadrivecteurs convenablement choisis.

Il est clair qu'on peut généraliser et définir des tenseurs contrevariants d'ordre 3, 4, ..., n, un tenseur de rang n ayant 4^n composantes [1] : par exemple, les 64 expressions

$$A'^{\sigma\tau\rho} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\beta}\frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\gamma}A^{\alpha\beta\gamma} \qquad \text{(indices muets } \alpha, \beta, \gamma\text{)}$$

constituent un tenseur contrevariant d'ordre 3.

Tenseurs covariants. — De même l'ensemble des 16 produits des composantes de deux quadrivecteurs covariants, et d'une

(1) Bien entendu, dans une multiplicité à trois dimensions seulement, le nombre des composantes serait 3^n. Un tenseur du second ordre, à 9 composantes, est utilisé dans la théorie de l'élasticité; il est fourni par les tensions internes d'un solide ou d'un fluide visqueux. On désigne par p_{xy} une composante qui est une tension dans le sens de l'axe des y et qui s'exerce sur une surface normale à l'axe des x : chaque composante est ainsi associée à deux directions et le tenseur est du second ordre dans une multiplicité à trois dimensions x, y, z.

façon générale l'ensemble de 16 quantités qui se transforment suivant la loi

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} A_{\mu\nu} \qquad \text{(indices muets } \mu, \nu) \tag{7-13}$$

constitue un *tenseur covariant de second ordre*.

Les 64 expressions

$$A'_{\sigma\tau\rho} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\tau} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\rho} A_{\alpha\beta\gamma}$$

sont lès composantes d'un tenseur d'ordre 3, ...

Tenseurs mixtes. — L'ensemble de $4^{n'+n''}$ fonctions qui participent à la fois des deux modes précédents de transformation

$$A^{\alpha\beta\gamma\dots}_{\mu\nu\sigma\dots} = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_a} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_b} \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_c} \cdots \frac{\partial x_m}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_n}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_p}{\partial x'_\sigma} \cdots A^{abc\dots}_{mnp\dots},$$

n' étant le nombre des indices $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; n'' le nombre des indices μ, ν, σ, ... est un *tenseur mixte* d'ordre $n = n' + n''$, contrevariant d'ordre n' et covariant d'ordre n''.

Tenseurs symétriques. — Un tenseur (contrevariant ou covariant) est dit *symétrique*, quand les composantes obtenues par permutation de deux indices μ et ν sont égales, par exemple

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu} \qquad \text{ou} \qquad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}.$$

Cette symétrie se conserve dans toutes les transformations de coordonnées.

Tenseurs symétriques gauches. — On appelle ainsi des tenseurs dont les composantes sont égales mais de signes opposés quand on permute deux indices

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}, \qquad A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}, \qquad \dots$$

Si le tenseur est de second ordre, les 4 composantes à indices égaux $A^{\mu\mu}$ (ou $A_{\mu\mu}$) sont nulles. Des 12 composantes qui restent, 6 seulement ont des valeurs différentes, au signe près (Sechservektor).

Un tenseur symétrique gauche d'ordre 3 n'a que 4 composantes

différentes (au signe près) et un tenseur symétrique gauche d'ordre 4 n'a plus qu'une composante. Il n'y a pas de tenseur symétrique gauche d'ordre supérieur à 4, du moins dans une multiplicité à quatre dimensions comme celle que nous envisageons.

63. Multiplication des tenseurs.

Multiplication extérieure. — Si l'on multiplie deux à deux les composantes d'un tenseur d'ordre n et celles d'un tenseur d'ordre n', on obtient $4^{n+n'}$ expressions. On déduit aisément des règles de transformation précédentes que ce sont les composantes d'un tenseur (ordre $n+n'$). Par exemple, les produits suivants de tenseurs A et B sont des tenseurs T :

$$A_{\mu\nu} B_\sigma = T_{\mu\nu\sigma}, \qquad A^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta} = T^{\alpha\beta\gamma\delta}, \qquad A_{\alpha\beta} B^{\gamma\delta} = T^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, \qquad \ldots.$$

Contraction d'un tenseur mixte. — Une opération d'une extrême importance est celle de la contraction.

Avec un tenseur mixte, on peut former un tenseur d'un ordre inférieur de deux unités en égalant un indice de caractère covariant et un indice de caractère contrevariant, c'est-à-dire en imposant la condition que ces deux indices aient toujours même valeur. Par exemple, dans le tenseur mixte $A^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$, imposons la condition $\sigma = \tau$, nous obtenons un tenseur $A^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}$ qui n'est plus que du second ordre. Nous avons en effet

$$A'^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\delta} A^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{8-13}$$

Mais

$$\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\delta} = \frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\delta} = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1$$

selon que $\gamma \neq \delta$ ou que $\gamma = \delta$.

Nous avons donc, en effectuant la sommation par rapport à δ,

$$\frac{\delta x_\gamma}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\delta} A^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = 0 + 0 + 0 + A^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma},$$

substituant dans (8-13)

$$A'^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma}.$$

$A^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}$ est donc un tenseur covariant d'ordre 2 [1].

De même le tenseur de quatrième ordre $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ donne, par une première contraction, le tenseur de second ordre

$$A^{\delta}_{\beta} = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta},$$

α a perdu son individualité et est devenu indice muet. Ce tenseur de second ordre donne lui-même, par contraction, le tenseur d'ordre nul

$$A = A^{\beta}_{\beta} = A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}.$$

Un tenseur d'ordre nul (1 composante) est indépendant du système de coordonnées ; c'est *un invariant appelé aussi scalaire*.

En résumé, on voit que si l'on impose l'égalité d'un indice supérieur et d'un indice inférieur, on forme un tenseur dont l'ordre est abaissé de deux unités, parce que les qualités de contrevariance et de covariance, correspondant à ces deux indices, se détruisent mutuellement.

Multiplication intérieure et multiplication mixte. — Nous pouvons combiner la multiplication extérieure et la contraction.

Considérons, par exemple, le tenseur covariant de second ordre $A_{\mu\nu}$, et le tenseur contrevariant de premier ordre (quadrivecteur) B^σ : par multiplication extérieure nous formons le tenseur mixte

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\sigma},$$

puis, par contraction, nous formons le quadrivecteur covariant

$$D_\mu = D^{\nu}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\nu}.$$

Nous appellerons ce quadrivecteur *produit intérieur des tenseurs* $A_{\mu\nu}$ *et* B^σ.

---

[1] Il est à remarquer que l'expression $A^{\tau}_{\mu\sigma\sigma}$ n'est pas un tenseur et ne présente aucun intérêt.

De même soit

$$D_{\mu\nu}^{\cdot\sigma\tau} = A_{\mu\nu} B^{\sigma\tau};$$

si, par contraction, nous formons

$$D_{\mu}^{\tau} = D_{\mu\nu}^{\nu\tau} = A_{\mu\nu} B^{\nu\tau}$$

nous faisons une opération mixte, car c'est une multiplication extérieure vis-à-vis de μ et τ, intérieure vis-à-vis de ν et σ.

64. Procédés permettant de reconnaître le caractère tensoriel.

Procédé par invariance d'un produit intérieur. — D'après ce qui précède, le produit intérieur $A_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots} B_{\alpha\beta\dots}^{\mu\nu\dots}$ est un scalaire lorsque $A_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}$ et $B_{\varepsilon\eta\dots}^{\sigma\tau\dots}$ sont deux tenseurs tels que les ordres de covariance et de contrevariance du second soient respectivement égaux aux ordres de contrevariance et de covariance du premier.

Inversement, lorsqu'un groupe de quantités $A(\mu\nu\dots\alpha\beta\dots)$ déterminées par n indices, comme un tenseur, mais dont on ignore *a priori* la nature, est tel que

$$A(\mu\nu\dots\alpha\beta\dots) B_{\alpha\beta\dots}^{\mu\nu\dots} = \text{invariant} \tag{9-13}$$

pour un choix *arbitraire* d'un tenseur $B_{\alpha\beta\dots}^{\mu\nu\dots}$ à n indices dont n' indices covariants et n'' indices contrevariants, on peut affirmer que $A(\mu\nu\dots\,\alpha\beta\dots)$ est un tenseur contrevariant d'ordre n' et covariant d'ordre n''.

En effet, d'après (9-13), on a pour une transformation arbitraire

$$A'(mn\dots ab\dots) B'^{mn\dots}_{ab\dots} = A(\mu\nu\dots\alpha\beta\dots) B_{\alpha\beta\dots}^{\mu\nu\dots}. \tag{10-13}$$

Or, par inversion des formules (6-13) et (7-13) généralisées, on a

$$B_{\alpha\beta\dots}^{\mu\nu\dots} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_m} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_n} \dots \frac{\partial x'_a}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_b}{\partial x_\beta} \dots B'^{mn\dots}_{ab\dots};$$

transportant dans (10-13), il vient

$$\left[A'(mn\dots ab\dots) - \left(\frac{\partial x_\mu}{x'_m} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_n} \dots \frac{\partial x'_a}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_b}{\partial x_\beta} \dots\right) A(\mu\nu\dots\alpha\beta\dots)\right] B'^{mn\dots}_{ab\dots} = 0.$$

Cette équation devant avoir lieu quel que soit le choix de B', la quantité entre crochets est nulle. $A(\mu\nu\ldots\alpha\beta\ldots)$ se transforme donc conformément aux règles de définition d'un tenseur $A^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots}$ contrevariant par rapport aux indices α, β, ... et covariant par rapport aux indices μ, ν, ..., ce qui démontre la proposition.

Par exemple, si $A(\mu\nu)B^{\mu\nu}$ est un invariant pour un choix *arbitraire* d'un tenseur $B^{\mu\nu}$ contrevariant du second ordre, $A(\mu\nu)$ est un tenseur covariant du second ordre $A_{\mu\nu}$.

De même, soient B^{μ} et C^{ν} des quadrivecteurs arbitraires; si le produit intérieur $A(\mu\nu)B^{\mu}C^{\nu}$ est un scalaire, $A(\mu\nu)$ est un tenseur covariant du second ordre $A_{\mu\nu}$.

Ce dernier résultat est encore exact si, pour un quadrivecteur quelconque B^{μ}, le produit intérieur $A(\mu\nu)B^{\mu}B^{\nu}$ est un invariant et si, de plus, la quantité $A(\mu\nu)$ est symétrique $[A(\mu\nu)=A(\nu\mu)]$. On voit en effet aisément que $A(\mu\nu)+A(\nu\mu)$ a le caractère tensoriel, d'où il résulte, à cause de la symétrie, que $A(\mu\nu)$ est un tenseur. Bien entendu, si B^{μ} est contrevariant, $A_{\mu\nu}$ est covariant, et si B_{μ} est covariant, $A^{\mu\nu}$ est contrevariant.

Loi du quotient (*Eddington*). — Une quantité, qui peut s'exprimer symboliquement comme le quotient d'un tenseur par un quadrivecteur, est elle-même un tenseur ou plus précisément un groupe de quantités dont le produit *intérieur* par un quadrivecteur (covariant ou contrevariant) *quelconque* est un tenseur est lui-même un tenseur.

Supposons en effet que le produit de $A(\mu\nu\sigma\ldots\alpha\beta\ldots)$ par B^{ν} soit un tenseur covariant par rapport à $\mu\sigma\ldots$, contrevariant par rapport à $\alpha\beta\ldots$ quel que soit le quadrivecteur B^{ν}. On a

$$A'(mns\ldots ab\ldots)B'^{n}=\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{m}}\frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'_{s}}\cdots\frac{\partial x'_{a}}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial x'_{b}}{\partial x_{\beta}}\cdots[A(\mu\nu\sigma\ldots\alpha\beta)B^{\nu}];$$

or

$$B^{\nu}=\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{n}}B'^{n};$$

substituant, on obtient

$$\left[A'(mns\ldots ab\ldots)-\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{m}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{n}}\frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'_{s}}\cdots\frac{\partial x'_{a}}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial x'_{b}}{\partial x_{\beta}}\cdots A(\mu\nu\sigma\ldots\alpha\beta\ldots)\right]B'^{n}=0,$$

B'^{n} étant arbitraire, la quantité entre crochets est nulle, ce qui

prouve que $A(\mu\nu\sigma\ldots\alpha\beta\ldots)$ obéit à la loi de définition des tenseurs covariants par rapport à $\mu\nu\sigma\ldots$ contrevariants par rapport à $\alpha\beta\ldots$.

En particulier, si $A(\mu\nu)B^\nu$ est un quadrivecteur covariant [ou $A(\mu\nu)B_\nu$ un quadrivecteur contrevariant] pour un choix arbitraire du quadrivecteur B^ν (ou B_ν), on peut en conclure que $A(\mu\nu)$ est un tenseur du second ordre covariant (ou contrevariant).

65. Les tenseurs fondamentaux.

Le tenseur covariant fondamental $g_{\mu\nu}$. — Dans l'expression de l'invariant ds^2 (8-12)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \tag{11-13}$$

dx_μ joue le rôle d'un quadrivecteur contrevariant arbitraire. Comme $g_{\mu\nu}$ est symétrique ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$), il résulte d'une des règles indiquées au n° 64 que $g_{\mu\nu}$ est un tenseur covariant symétrique du second ordre.

Le tenseur contrevariant fondamental $g^{\mu\nu}$. — Écrivons le déterminant des $g_{\mu\nu}$

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}, \qquad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \tag{12-13}$$

puis formons le mineur de chaque $g_{\mu\nu}$ et divisons chaque mineur par la valeur g du déterminant. Nous obtenons 16 grandeurs $g^{\mu\nu}$ (10 seulement sont distinctes, car $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$) qui constituent un tenseur contrevariant, ainsi que nous allons le montrer.

D'après une propriété connue des déterminants, on a

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = 1 \quad \text{ou} \quad 0. \tag{13-13}$$

selon que $\mu = \nu$ ou que $\mu \neq \nu$.

Posons

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = g_\mu^\nu, \tag{14-13}$$

g_μ^ν étant égal à 1 ou à 0 suivant que $\mu = \nu$ ou que $\mu \neq \nu$, au lieu

'expression (11-13) de ds^2, nous pouvons écrire

$$ds^2 = g_{\mu\sigma} g^{\sigma}_{\nu}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} g^{\sigma\tau}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu}.$$

'après les règles de multiplication des tenseurs, les grandeurs

$$d\xi_{\sigma} = g_{\mu\sigma}\, dx_{\mu}$$

ıent un quadrivecteur covariant, puisque $g_{\mu\sigma}$ est un tenseur ıriant et dx_{μ} un quadrivecteur contrevariant, et comme les dx_{μ} vent être choisis arbitrairement, ce quadrivecteur $d\xi_{\sigma}$ est traire.

ous avons donc

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}\, d\xi_{\sigma}\, d\xi_{\tau}.$$

uisque ds^2 est un invariant, que $d\xi_{\sigma}$ est arbitraire, et que $g^{\sigma\tau}$ symétrique, il résulte d'une des règles données au n° 64 que est un tenseur contrevariant.

e tenseur mixte fondamental. — $g_{\mu\sigma}$ et $g^{\nu\sigma}$ étant deux eurs, le premier covariant, le second contrevariant, (14-13) ime que g^{ν}_{μ} est un tenseur mixte. C'est un tenseur remar-ıle car *ses composantes conservent les mêmes valeurs dans les systèmes de coordonnées.*

ous remarquerons que

$$g^{\mu}_{\mu} = g^1_1 + g^2_2 + g^3_3 + g^4_4 = 4. \qquad \text{3)}$$

. A^{ν} est un groupe *quelconque* de quatre quantités, nous ıs, puisque $g^{\sigma}_{\nu} = 1$ ou 0 suivant que $\nu = \sigma$ ou que $\nu \neq \sigma$,

$$g^{\sigma}_{\nu} A^{\nu} = A^{\sigma} + 0 + 0 + 0; \qquad \text{3)}$$

l'autres termes, g^{σ}_{ν} est un *opérateur de substitution*. Ce ltat montre d'ailleurs directement que g^{σ}_{ν} est un tenseur, car ' est un quadrivecteur, le produit intérieur $g^{\sigma}_{\nu} A^{\nu}$ donne tou-s un quadrivecteur; ce qui prouve, d'après la loi du quotient, g^{σ}_{ν} a le caractère tensoriel.

.diquons enfin une relation importante. Désignons par $|g_{\mu\nu}|$, |, $|g^{\nu}_{\mu}|$ les déterminants ayant pour éléments respectifs les $g_{\mu\nu}$, g^{ν}_{μ}.

D'après la multiplication des déterminants, on a

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}|\,|g^{\alpha\nu}|.$$

Comme on a aussi

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |g^{\nu}_{\mu}| = 1,$$

on voit que

$$(17\text{-}13) \qquad |g_{\mu\nu}|\,|g^{\mu\nu}| = 1$$

66. Tenseurs associés [1].

Les trois tenseurs fondamentaux qui viennent d'être définis permettent de transformer les tenseurs, c'est-à-dire de construire de nouveaux tenseurs de types différents en faisant passer à volonté un indice de bas en haut ou inversement.

Par exemple, partons d'un quadrivecteur contrevariant A^{μ} ou d'un tenseur contrevariant $A^{\mu\nu}$, nous pouvons écrire

$$A^{\mu} = g^{\mu\alpha}A_{\alpha}, \qquad A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}A^{\nu}_{\alpha}, \qquad A^{\nu}_{\alpha} = g^{\nu\beta}A_{\alpha\beta}, \qquad A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\alpha\beta}.$$

Nous avons ainsi défini un nouveau vecteur A_{α}, covariant, ainsi que deux tenseurs, l'un mixte A^{ν}_{α}, l'autre covariant $A_{\alpha\beta}$.

Nous avons de même

$$A_{\mu} = g_{\mu\alpha}A^{\alpha}, \qquad A^{\nu}_{\mu} = g_{\mu\alpha}A^{\nu\alpha}.$$

Les vecteurs A_{μ} et A^{μ} sont dits *associés l'un à l'autre;* de même les tenseurs $A_{\mu\nu}$, A^{ν}_{μ} $A^{\mu\nu}$ sont associés entre eux.

On doit remarquer qu'il n'y a aucune contradiction dans les définitions qui précèdent, car si l'on élève un indice, puis qu'on l'abaisse, on retrouve le tenseur primitif. En effet, on a par exemple

$$A_{\mu\beta} = g_{\nu\beta}A^{\nu}_{\mu} = g_{\nu\beta}g^{\nu\alpha}A_{\mu\alpha} = g^{\alpha}_{\beta}A_{\mu\alpha} = A_{\mu\beta}.$$

Un cas particulièrement remarquable est celui où les $g_{\mu\nu}$ ont les valeurs galiléennes (10-12). Dans le cas de l'espace à trois dimensions où l'élément de ligne est $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, les

---

[1] EDDINGTON, *Espace, Temps, Gravitation;* traduction française par J. Rossignol, partie théorique, n° 18.

$g_{\mu\nu}$ galiléens ont pour valeurs 1 ou 0 suivant que $\mu = \nu$ ou (
$\mu \neq \nu$, de sorte que les opérations précédentes ne modifient
les composantes d'un tenseur d'espace tridimensionnel; dans
cas de l'Espace-Temps,

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2,$$

les valeurs non nulles des $g_{\mu\nu}$ sont -1 pour les termes d'esp
et $+1$ pour le terme de temps : élever ou abaisser un ind
change simplement le signe de certaines des composantes.
peut donc utiliser un quelconque des tenseurs associés p
représenter un ensemble de grandeurs physiques sans entrer
conflit avec les définitions des anciennes théories.

L'existence des tenseurs associés, qui représentent chacun
même entité physique, montre qu'une entité n'est pas, en el
même, covariante, contrevariante ou mixte; on peut, à volonté,
attribuer des composantes ayant celui des trois caractères qu'
veut.

Invariant contracté. — Tout tenseur d'ordre pair permet
former un invariant : il suffit d'amener la moitié des indices
haut, la moitié en bas et de contracter complètement; on obti
évidemment le même scalaire, appelé *invariant contracté*, q
que soit celui des tenseurs associés d'où l'on parte.

Soit, par exemple, $A_{\mu\nu\sigma\rho}$: on forme $A_{\mu\nu}^{\sigma\rho}$, puis $A = A_{\mu\nu}^{\mu\nu}$. On p
aussi former des invariants dérivés tels que $A_{\mu\nu\sigma\rho} A^{\mu\nu\sigma\rho}$, $A_{\mu\nu\alpha}^{\alpha} A_{\beta}^{\mu}$

67. Longueur généralisée d'un vecteur. Condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

Dans la théorie vectorielle ordinaire (espace seul), on appe
produit scalaire de deux vecteurs A et B le produit de le
longueurs par le cosinus de l'angle que forment leurs directio
ce produit a pour valeur

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A_\mu B_\mu \quad \text{(en notation abrégée)}. \tag{18 13}$$

Les coordonnées étant galiléennes, les trois $g_{\mu\nu}$ qui ne sont
nuls sont égaux à 1 et il n'y a pas à faire la distinction de vecte
covariants et vecteurs contrevariants

Le carré de la longueur d'un vecteur peut être considéré comme le produit scalaire du vecteur par lui-même.

Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Ces notions se généralisent facilement, dans le cas de coordonnées quelconques, grâce à l'introduction des quadrivecteurs covariant et contrevariant associés. Le scalaire

$$A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

dont (18-13) est la forme dégénérée en coordonnées galiléennes et pour trois dimensions, est la généralisation du produit scalaire de la théorie ordinaire.

Le carré de la *longueur généralisée* d'un quadrivecteur A^μ (ou A_μ) est le scalaire

$$l^2 = A_\mu A^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu. \tag{19-13}$$

Enfin la condition d'orthogonalité de deux quadrivecteurs A_μ et B_μ, ou A^μ et B^μ est

$$A_\mu B^\mu = 0 \quad \text{ou} \quad A^\mu B_\mu = 0. \tag{20-13}$$

Si un vecteur A_μ subit un accroissement orthogonal infiniment petit dA_μ (ou si A^μ subit l'accroissement dA^μ), sa longueur n'éprouve qu'une variation du second ordre; on a, en effet, en n'écrivant pas les termes d'ordre supérieur au premier

$$\begin{aligned}(l + dl)^2 &= (A_\mu + dA_\mu)(A^\mu + dA^\mu) \\ &= A_\mu A^\mu + A^\mu dA_\mu + A_\mu dA^\mu = l^2 + 0 + 0\end{aligned}$$

puisque, l'accroissement étant orthogonal, on a

$$A^\mu dA_\mu = A_\mu dA^\mu = 0.$$

68. Expression invariante de l'hypervolume. Densité tensorielle.

Cherchons d'abord la loi de transformation du déterminant $g = |g_{\mu\nu}|$. D'après (7-13), on a

ce qu'on peut écrire

$$(21\text{-}13) \qquad g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}\right| |g_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|^2 g$$

ou

$$(22\text{-}13) \qquad \sqrt{-g'} = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \sqrt{-g}.$$

Nous prenons $\sqrt{-g}$ parce que g est toujours négatif, ainsi qu'on le voit aisément car d'après (21-13) g ne change jamais de signe, et $g = -1$ pour les valeurs galiléennes (10-12).

D'autre part, la loi de transformation de l'élément de quadrivolume

$$d\omega = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

est, d'après un théorème connu de Jacobi,

$$(23\text{-}13) \qquad d\omega' = \left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| d\omega.$$

Multipliant (22-13) et (23-13), il vient

$$(24\text{-}13) \qquad \sqrt{-g'}\, d\omega' = \sqrt{-g}\, d\omega.$$

Dans l'Univers euclidien tangent, et en coordonnées galiléennes (X_1, X_2, X_3 coordonnées rectangulaires d'espace, $X_4 = ct$), l'élément d'hypervolume est

$$d\omega_0 = dX_1\, dX_2\, dX_3\, dX_4 \qquad \text{avec} \qquad \sqrt{-g} = 1.$$

On a donc

$$(25\text{-}13) \qquad d\omega_0 = \sqrt{-g}\, d\omega = \sqrt{-g'}\, d\omega' = \text{invariant}.$$

Densité tensorielle. — Soit maintenant $T^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots}$ un tenseur faisant partie d'un *champ tensoriel*, l'intégrale

$$\iiiint T^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots} \sqrt{-g}\, d\omega,$$

prise entre des limites définies d'une façon absolue, est elle-même un tenseur, puisque $\sqrt{-g}\, d\omega$ est un invariant.

Il est logique de considérer comme unité de quadrivolume la cellule quadridimensionnelle dont les arêtes ont des longueurs

unités par rapport aux coordonnées utilisées; c'est pourquoi l'on donne à l'expression $T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots}\sqrt{-g}$ le nom de *densité tensorielle*. Lorsque nous verrons intervenir le facteur $\sqrt{-g}$, nous saurons que la signification physique se rapporte plutôt à la densité tensorielle qu'au tenseur.

Quelle que soit la nature de la portion d'Univers considérée (Univers euclidien ou non), il est toujours possible de choisir les coordonnées qu'en tout point-événement on ait $\sqrt{-g} = 1$. Si en effet trois des quatre familles d'espaces coordonnés tridimensionnels ont été prises arbitrairement, on peut toujours choisir la quatrième de façon à diviser l'Univers en cellules ayant toutes le même quadrivolume; avec ce choix de coordonnées, il n'y a plus de distinction entre tenseurs et densités tensorielles et les calculs sont souvent très simplifiés.

69. Différentiation covariante ou formation de tenseurs par dérivation.

Symboles de Christoffel. — Dans la suite, nous ferons un usage constant des deux symboles suivants :

Premier genre.

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right), \tag{26-13}$$

(il n'y a pas de sommation),

Deuxième genre.

$$\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{Bmatrix} = g^{\lambda\alpha}\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{bmatrix} \tag{27-13}$$

(sommation par rapport à α).

De ces définitions, on déduit

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{bmatrix} = g_{\lambda\alpha}\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix}. \tag{28-13}$$

En effet, on a

Nous voyons encore que

$$(29\text{-}13) \qquad \begin{bmatrix}\mu\nu \\ \lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda\nu \\ \mu\end{bmatrix} = \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}.$$

Les expressions qui définissent les symboles sont symétriques en μ et ν. Il existe quarante symboles différents de chaque genre.

Nous verrons plus loin que, de même que les $g_{\mu\nu}$ sont les composantes du potentiel généralisé, les $\left\{\begin{matrix}\mu\nu \\ \lambda\end{matrix}\right\}$ sont les composantes de la force généralisée, mais alors que les composantes du potentiel forment le tenseur $g_{\mu\nu}$, les $\left\{\begin{matrix}\mu\nu \\ \lambda\end{matrix}\right\}$ ne constituent pas un tenseur.

Dérivée covariante d'un quadrivecteur. — Partons d'abord d'un tenseur d'ordre nul ou scalaire. Sa dérivée est un quadrivecteur covariant.

On a, en effet, φ étant une fonction de point invariante dans toute transformation de coordonnées :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha},$$

ce qui prouve (4-13) que $\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}$ est un vecteur covariant.

Mais on ne peut pas continuer dans cette voie ; la dérivée d'un quadrivecteur n'est pas un tenseur.

Nous pouvons cependant trouver une expression *tensorielle* qui remplacera la dérivée ordinaire ([1]).

Il nous faut d'abord établir une formule auxiliaire.

Partons du tenseur covariant $g_{\mu\nu}$ nous avons, par une transformation de coordonnées :

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} g_{\alpha\beta};$$

d'où, par dérivation,

$$(30\text{-}13) \qquad \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'_\lambda} = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} + \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\nu\,\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\right) + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}.$$

Dans le second terme de la parenthèse nous avons permuté les

([1]) EDDINGTON, *Report on the theory of gravitation*, p. 36. *Espace, Temps et Gravitation*, partie théorique, n° 22.

indices α et β, ce qui est légitime puisque ce sont des indices muets; de plus, dans le dernier terme, nous avons écrit

$$\frac{\partial}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}.$$

Nous avons de même les formules

$$(31\text{-}13)\quad \frac{\partial g'_{\nu\lambda}}{\partial x'_\mu} = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\nu\,\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda\,\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\right) + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha},$$

$$(32\text{-}13)\quad \frac{\partial g'_{\mu\lambda}}{\partial x'_\nu} = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda\,\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\right) + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta}.$$

Nous avons interchangé dans les derniers termes les indices muets α, β, γ.

Ajoutons (31) et (32) et retranchons (30), nous obtenons

$$(33\text{-}13)\qquad \begin{bmatrix}\mu\nu\\ \lambda\end{bmatrix}' = g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{bmatrix}$$

et, en multipliant les deux membres par $g'^{\lambda\rho}\dfrac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}$,

$$(34\text{-}13)\qquad \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \rho\end{Bmatrix}'\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} = \left(g'^{\lambda\rho}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}\right)g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}$$
$$+\left(g'^{\lambda\rho}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}\right)\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{bmatrix}$$
$$= g^{\beta\varepsilon}g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}g^{\gamma\varepsilon}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{bmatrix}$$

[d'après (6-13)]

$$= \frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \varepsilon\end{Bmatrix}$$

[d'après (14-13), (16-13) et (27-13)].

C'est la formule auxiliaire dont nous allons nous servir.

Soit maintenant A_μ un quadrivecteur covariant; nous avons

$$A'_\mu = \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu}A_\sigma$$

et, par dérivation,

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\tau}{\partial x'_\nu}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\tau} + \frac{\partial^2 x_\sigma}{\partial x'_\mu\,\partial x'_\nu}A_\sigma.$$

Remplaçant $\frac{\partial^2 x_\sigma}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu}$ par sa valeur tirée de la formule auxiliaire (34), nous avons

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \rho} \right\}' A_\sigma \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\rho} = \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\tau}{\partial x'_\nu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\tau} - \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \left\{ {\alpha\beta \atop \sigma} \right\} A_\sigma. \tag{35-13}$$

Or $A_\sigma \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\rho} = A'_\rho$ et d'autre part nous pouvons remplacer dans le dernier terme les indices muets α, β, σ par σ, τ, ρ. En posant alors

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \rho} \right\} A_\rho. \tag{36-13}$$

L'équation (35) s'écrit

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\tau}{\partial x'_\nu} A_{\sigma\tau},$$

ce qui prouve que $A_{\mu\nu}$, défini par (36), est un tenseur covariant. Nous avons donc atteint le but que nous nous étions proposé. Ce tenseur se nomme *dérivée covariante de* A_μ.

Introduisons maintenant le quadrivecteur contrevariant A^μ associé à A_μ. Nous avons

$$A_\sigma = g_{\sigma\rho} A^\rho.$$

D'après (36), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} A_{\sigma\nu} &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} (g_{\sigma\rho} A^\rho) - \left\{ {\sigma\nu \atop \alpha} \right\} (g_{\alpha\rho} A^\rho) \\ &= g_{\sigma\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial x_\nu} + A^\rho \left(\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x_\nu} - \left[{\sigma\nu \atop \rho} \right] \right) \qquad \text{[d'après (28-13)]} \\ &= g_{\sigma\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial x_\nu} + A^\rho \left[{\rho\nu \atop \sigma} \right] \qquad \text{[d'après (29-13)].} \end{aligned}$$

Multiplions enfin les deux membres par $g^{\sigma\mu}$ pour faire passer un indice en haut ; nous trouvons

$$A^\mu_\nu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \left\{ {\rho\nu \atop \mu} \right\} A^\rho. \tag{37-13}$$

Le tenseur mixte A^μ_ν est la *dérivée covariante du quadrivecteur contrevariant* A^μ (elle est appelée *covariante* parce que la différentiation introduit un indice covariant ν).

opérations précédentes et former la dérivée covariante d'un tenseur quelconque. Prenons le cas d'un tenseur covariant du second ordre. Un tel tenseur peut être considéré comme la somme de tenseur du type $B_\lambda C_\mu$ [1]; d'après (36-13), les expressions

$$\frac{\partial B_\lambda}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \lambda\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} B_\varepsilon ; \qquad \frac{\partial C_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} C_\varepsilon$$

sont des tenseurs. Multiplions la première expression par C_μ, la seconde par B_λ : nous obtenons des tenseurs d'ordre 3, dont l'addition donne le tenseur

$$(38\text{-}13) \qquad A_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} A_{\varepsilon\mu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} A_{\lambda\varepsilon}$$

en posant $A_{\lambda\mu} = B_\lambda C_\mu$. Comme le second membre est linéaire et homogène relativement aux $A_{\lambda\mu}$ et à leurs dérivées premières, cette formation reste la même pour une somme de tenseurs tels que $B_\lambda C_\mu$, c'est-à-dire pour un tenseur covariant quelconque d'ordre 2. *Le tenseur $A_{\lambda\mu\nu}$ est appelé « dérivée covariante du tenseur $A_{\lambda\mu}$ ».*

Le résultat

$$(39\text{-}13) \qquad A_{\lambda\mu\nu} = (B_\lambda C_\mu)_\nu = B_{\lambda\nu} C_\mu + B_\lambda C_{\mu\nu}$$

---

(1) Von LAUE donne la démonstration suivante (*Die Relativitätstheorie*, II Band, p. 49). Soit un tenseur du deuxième ordre, $A_{\lambda\mu}$ désignant ses composantes pour un certain système de coordonnées. Donnons-nous d'une manière absolument arbitraire un groupe de quatre quadrivecteurs ayant dans le système considéré les composantes B_λ, C_λ, D_λ, E_λ; nous supposerons toutefois que le déterminant formé par les B_λ, C_λ, D_λ, E_λ, est différent de zéro. Nous pouvons alors déterminer un second groupe de quatre quadrivecteurs de composantes B'_λ, C'_λ, D'_λ, E'_λ, tel que

$$A_{\lambda\mu} = B_\lambda B'_\mu + C_\lambda C'_\mu + D_\lambda D'_\mu + E_\lambda E'_\mu.$$

On aura en effet B'_1, C'_1, D'_1, E'_1 en considérant les quatre équations linéaires à déterminant non nul

$$A_{\lambda 1} = B_\lambda B'_1 + C_\lambda C'_1 + D_\lambda D'_1 + E_\lambda E'_1 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4).$$

On obtiendra de même B'_2, C'_2, etc.

Les tenseurs du deuxième ordre $A_{\lambda\mu}$ peuvent donc se décomposer en sommes de produits de quatre paires de vecteurs. Cette démonstration se généralise pour un tenseur d'ordre quelconque.

montre que la différentiation covariante est une opération distributive comme la différentiation ordinaire.

On obtient d'une façon analogue les dérivées covariantes des tenseurs contrevariants et mixtes du second ordre. On trouve

$$(40\text{-}13) \qquad A^{\lambda\mu}_{\nu} = \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \begin{Bmatrix} \varepsilon\nu \\ \lambda \end{Bmatrix} A^{\varepsilon\mu} + \begin{Bmatrix} \varepsilon\nu \\ \mu \end{Bmatrix} A^{\lambda\varepsilon},$$

$$(41\text{-}13) \qquad A^{\mu}_{\lambda\nu} = \frac{\partial A^{\mu}_{\lambda}}{\partial x_\nu} - \begin{Bmatrix} \lambda\nu \\ \varepsilon \end{Bmatrix} A^{\mu}_{\varepsilon} + \begin{Bmatrix} \varepsilon\nu \\ \mu \end{Bmatrix} A^{\varepsilon}_{\lambda}.$$

Pour un tenseur d'ordre quelconque, par exemple $A^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$, on a

$$A^{\rho}_{\lambda\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} A^{\rho}_{\lambda\mu\nu} - \begin{Bmatrix} \lambda\sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix} A^{\rho}_{\varepsilon\mu\nu} - \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix} A^{\rho}_{\lambda\varepsilon\nu} - \begin{Bmatrix} \nu\sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix} A^{\rho}_{\lambda\mu\varepsilon} + \begin{Bmatrix} \varepsilon\sigma \\ \rho \end{Bmatrix} A^{\varepsilon}_{\lambda\mu\nu}.$$

Nous pouvons comprendre dès maintenant l'utilité de la dérivée covariante.

Lorsque les $g_{\mu\nu}$ sont constants, ce qui est le cas en coordonnées galiléennes, les symboles de Christoffel sont nuls ; les dérivées covariantes des tenseurs se réduisent aux dérivées ordinaires. Donc, lorsqu'une loi physique est exprimée en coordonnées galiléennes par une relation où figurent des expressions qui sont visiblement des formes degénérées de tenseurs et leurs dérivées ordinaires, nous pouvons, toujours en coordonnées galiléennes, remplacer les formes dégénérées par les tenseurs eux-mêmes et les dérivées ordinaires par les dérivées covariantes ; en coordonnées galiléennes, rien n'est changé et en même temps la loi est mise sous une forme tensorielle générale. Cette forme est celle exigée par le principe de relativité, car elle est indépendante du système de coordonnées : c'est certainement l'expression générale de la loi en coordonnées arbitraires dans un univers euclidien et c'est presque toujours [1] l'expression de la loi dans un univers non euclidien, dans l'Univers réel où règne un champ de gravitation.

Voici un exemple (Eddington) : supposons que nous cherchions l'équation générale de la propagation d'un potentiel φ avec la vitesse de la lumière. En coordonnées galiléennes

$$X_1 = x, \qquad X_2 = y, \qquad X_3 = z, \qquad X_4 = ct,$$

[1] C'est nécessairement l'expression générale quel que soit *le genre d'Espace-Temps* lorsque le principe d'équivalence (n° 55) est applicable. Nous préciserons plus loin (n° 77) les conditions de validité de ce principe.

cette équation est

$$\square \varphi = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_4^2} = 0. \tag{42-13}$$

Les valeurs galiléennes non nulles des $g^{\mu\nu}$ sont

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1 ; \qquad g^{44} = +1 ;$$

nous pouvons donc écrire (en coordonnées galiléennes) :

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} = 0. \tag{43-13}$$

Le potentiel étant un scalaire, sa dérivée ordinaire est un vecteur covariant φ_μ (la dérivée ordinaire d'un scalaire est toujours identique à la dérivée covariante) ; en coordonnées galiléennes, nous pouvons remplacer la dérivée ordinaire de ce vecteur $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}$ par la dérivé covariante $\varphi_{\mu\nu}$ et écrire

$$g^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} = 0. \tag{44-13}$$

Jusqu'ici les coordonnées galiléennes sont nécessaires.

Mais maintenant nous remarquons que l'équation (44) est sous une forme tensorielle, et il y a même cette particularité que le premier membre est un invariant pour tous les changements de coordonnées. Cet invariant étant nul pour des coordonnées galiléennes est nécessairement nul *dans un univers euclidien* avec des coordonnées arbitraires :

$$g^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right) = 0. \tag{45-13}$$

Telle est l'expression de l'équation (42-13) en coordonnées curvilignes, mais toujours dans un univers euclidien, car une transformation de coordonnées n'altère pas la *nature* de l'Espace-Temps.

Il est donc démontré que si le potentiel φ se propage suivant la la loi (42-13) en coordonnées galiléennes, il se propage suivant la loi (45-13) dans n'importe quel système de référence et quelles que soient les coordonnées choisies dans ce système, pourvu que l'univers soit euclidien.

Est-ce aussi l'expression générale dans l'Univers non euclidien, c'est-à-dire dans un champ de gravitation? certainement, si le

principe d'équivalence est applicable, c'est à-dire si nous pouvons, pour le phénomène de la propagation, remplacer en chaque point d'Univers l'Univers réel par l'Univers euclidien tangent. D'après ce que nous verrons plus loin (n° 77), il en est bien ainsi parce que les dérivées des $g_{\mu\nu}$ d'ordre supérieur au premier ne figurent pas dans (45-13).

70. Signification de la dérivée covariante. Déplacement parallèle.

Soit A un vecteur que nous supposerons d'abord, comme dans la théorie ordinaire, tridimensionnel dans un espace euclidien; prenons des coordonnées galiléennes : si nous déplaçons ce vecteur sans le faire varier, parallèlement à lui-même, la dérivée $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ est nulle. C'est ainsi que dans un champ de vecteur uniforme, on a en tout point $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = 0$. Mais si le champ n'est pas uniforme, la dérivée n'est pas nulle et $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ donne le taux de variation du vecteur suivant la direction x_ν. Ce résultat s'étend évidemment à un quadrivecteur pourvu que l'espace-temps soit euclidien et que les coordonnées soient galiléennes.

Si les coordonnées ne sont pas galiléennes (espace-temps euclidien ou non euclidien), la dérivée ordinaire ne peut plus représenter le taux de variation absolue, car il se produit une pseudo-variation due à la nature curviligne des coordonnées [1]. Un tenseur seul peut donner le taux de variation absolue et ce tenseur est nécessairement la dérivée covariante puisqu'il doit se réduire à la dérivée ordinaire quand les coordonnées sont galiléennes (symboles de Christoffel nuls). Soit alors A^μ un quadrivecteur contrevariant (ou A_μ un quadrivecteur covariant); la dérivée covariante A^μ_ν (ou $A_{\mu\nu}$) est formée du terme $\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$ $\left(\text{ou } \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$ qui mesure le taux de variation *apparente*, auquel il faut ajouter le terme $\begin{Bmatrix} \alpha\nu \\ \mu \end{Bmatrix} A^\alpha$ $\left(\text{ou le terme } -\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} A_\alpha\right)$ attribuable à la courbure

[1] Par exemple, dans un champ de force *uniforme*, les composantes polaires de la force varient d'un point à l'autre.

des coordonnées et qui disparaît en coordonnées galiléennes. Ainsi la composante A^{μ}_{ν} (ou $A_{\mu\nu}$) de la dérivée covariante doit être considérée comme représentant en chaque point le taux de la variation *absolue*, suivant la direction x_ν, de la composante A^{μ} (ou A_{μ}) du vecteur; $\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_\nu}$ $\left(\text{ou } \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_\nu}\right)$ est le taux de la variation apparente; enfin $-\left\{ {\alpha\nu \atop \mu} \right\} A^{\alpha}$ $\left(\text{ou } \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} A_{\alpha}\right)$ est le taux de la pseudo-variation.

Supposons qu'on déplace un vecteur suivant un certain contour; dans un espace euclidien et en coordonnées galiléennes, la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur reste de même longueur et parallèle à lui-même pendant le déplacement est $\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_\nu} = 0$ $\left(\text{ou } \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_\nu} = 0\right)$. Cette condition étant la forme dégénérée de l'équation *tensorielle* $A^{\mu}_{\nu} = 0$ (ou $A_{\mu\nu} = 0$), nous dirons que l'annulation de la dérivée covariante d'un quadrivecteur en tout point d'un contour exprime un déplacement « sans variation absolue » (Eddington) ou encore un « déplacement parallèle » (Weyl) le long de ce contour, bien qu'il ne puisse être, dans le cas général, question de « parallélisme » au sens de la géométrie euclidienne.

71. Quelques formules utiles.

1° Nous avons vu (13-13) que

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} = 0 \text{ ou } 1 \text{ suivant que } \nu \neq \alpha \text{ ou que } \nu = \alpha;$$

on a donc

$$g^{\mu\alpha} dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} dg^{\mu\alpha} = 0; \tag{46-13}$$

d'où l'on déduit

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} dg_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu} g^{\nu\beta} dg^{\mu\alpha} = - g^{\beta}_{\mu} dg^{\mu\alpha} = - dg^{\alpha\beta}. \tag{47-13}$$

On a de même

$$dg_{\alpha\beta} = - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} dg^{\mu\nu}. \tag{48-13}$$

2° Soient $A^{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta}$ deux tenseurs associés. Multiplions par $A^{\alpha\beta}$

les deux membres de l'équation précédente (48); nous obtenons

$$A^{\alpha\beta}\, dg_{\alpha\beta} = -\Lambda_{\mu\nu}\, dg^{\mu\nu} = -\Lambda_{\alpha\beta}\, dg^{\alpha\beta}. \tag{49-13}$$

3° g étant le déterminant $|g_{\mu\nu}|$, dg se forme en prenant la différentielle de chacun des $g_{\mu\nu}$ en la multipliant par le mineur correspondant à $g_{\mu\nu}$ et en faisant la somme algébrique de tous ces produits. Nous pouvons donc écrire

$$dg = g\, g^{\mu\nu}\, dg_{\mu\nu}; \tag{50-13}$$

d'où nous tirons

$$d(\operatorname{Log} g) = g^{\mu\nu}\, dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\, dg^{\mu\nu}. \tag{51-13}$$

4° Contractons le symbole de Christoffel de deuxième genre (27-13):

$$\left\{ \begin{matrix} \mu\rho \\ \rho \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\varepsilon} \left(\frac{\partial g_{\mu\varepsilon}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial g_{\rho\varepsilon}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x_\varepsilon} \right) = \frac{1}{2} g^{\rho\varepsilon} \frac{\partial g_{\rho\varepsilon}}{\partial x_\mu}, \tag{52-13}$$

car on peut permuter les indices muets ρ et ε et l'on voit que les premiers et troisièmes termes des parenthèses disparaissent dans la sommation.

D'après (50-13), cette dernière formule s'écrit

$$\left\{ \begin{matrix} \mu\rho \\ \rho \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \operatorname{Log} \sqrt{-g}}{\partial x_\mu}. \tag{53-13}$$

72. Divergence d'un tenseur.

Dans la théorie habituelle des vecteurs d'espace, on appelle « divergence » le scalaire

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

nous pouvons la représenter, dans notre notation, par

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}.$$

1° *Quadrivecteur contrevariant.* — La généralisation s'impose; il faut considérer la dérivée covariante et prendre le scalaire A^μ_μ. Nous appellerons donc *divergence* la *dérivée covariante contractée*.

D'après (37-13), nous avons

$$A^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}} + \left\{ \begin{matrix} \rho\mu \\ \mu \end{matrix} \right\} A^{\rho}$$

$$= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}} + A^{\rho} \frac{\partial \operatorname{Log} \sqrt{-g}}{\partial x_{\rho}} \qquad \text{[d'après (53-13)]}$$

$$= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}} + A^{\mu} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_{\mu}}$$

$$(54\text{-}13) \qquad = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (A^{\mu} \sqrt{-g}).$$

Désignant les densités tensorielles par des lettres de ronde nous pouvons écrire

$$(55\text{-}13) \qquad \mathfrak{A}^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\mu}}{\partial x_{\mu}}.$$

2° *Tenseur mixte du second ordre.* — Nous appellons, de même, *divergence* la dérivée covariante contractée.

D'après (41-13) nous avons

$$A^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \left\{ \begin{matrix} \varepsilon\nu \\ \nu \end{matrix} \right\} A^{\varepsilon}_{\mu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} A^{\nu}_{\varepsilon}.$$

Les deux premiers termes se réduisent, comme plus haut, à

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (A^{\nu}_{\mu} \sqrt{-g}),$$

de sorte que la divergence s'écrit

$$A^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (A^{\nu}_{\mu} \sqrt{-g}) - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} A^{\nu}_{\varepsilon}.$$

L'expression se simplifie lorsque $A^{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique, car le dernier terme

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} \right) g^{\varepsilon\alpha} A^{\nu}_{\varepsilon}$$

se réduit à

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}} A^{\alpha\nu},$$

et l'on obtient pour l'expression de la divergence

$$(56\text{-}13) \qquad A^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (A^{\nu}_{\mu} \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} A^{\sigma\rho} \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x_{\mu}}$$

ou, ce qui revient au même, d'après (49-13),

$$(57\text{-}13) \qquad A^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(A^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g}\right) + \frac{1}{2}A_{\sigma\rho}\frac{\partial g^{\sigma\rho}}{\partial x_\mu}.$$

3° *Tenseur contrevariant du second ordre.* — La divergence est

$$(58\text{-}13) \qquad A^{\mu\nu}_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(A^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) + \begin{Bmatrix}\varepsilon\nu\\ \mu\end{Bmatrix} A^{\varepsilon\nu}.$$

Le dernier terme disparaît lorsque le tenseur est symétrique gauche.

En résumé, en introduisant les densités tensorielles, nous avons

$$(59\text{-}13) \qquad \mathfrak{A}^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathfrak{A}^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{\sigma\rho}\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x_\mu} \qquad \text{(pour les tenseurs symétriques)},$$

$$(60\text{-}13) \qquad \mathfrak{A}^{\mu\nu}_{\nu} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \qquad \text{(pour les tenseurs symétriques gauches)}.$$

73. Le tenseur de Riemann-Christoffel.

Nous nous proposons maintenant de chercher les tenseurs qu'on peut obtenir par différentiation à partir du tenseur fondamental des $g_{\mu\nu}$ seul. La solution paraît évidente : il semble qu'il suffise de former la dérivée covariante du tenseur $g_{\mu\nu}$, mais on constate, en remplaçant dans (38-13) $A_{\lambda\mu}$ par $g_{\mu\nu}$ que le tenseur ainsi obtenu est identiquement nul.

On arrive cependant au but de la façon suivante :

Formons la dérivée seconde covariante d'un vecteur arbitraire A_μ; d'après les formules (36-13) et (38-13) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu\sigma} &= \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \rho\end{Bmatrix}A_\rho\right) - \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\varepsilon\nu\\ \rho\end{Bmatrix}A_\rho\right) - \begin{Bmatrix}\nu\sigma\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\varepsilon} - \begin{Bmatrix}\mu\varepsilon\\ \rho\end{Bmatrix}A_\rho\right) \\ &= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \rho\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\nu\sigma\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\varepsilon} \\ &\quad + \begin{Bmatrix}\nu\sigma\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\mu\varepsilon\\ \rho\end{Bmatrix}A_\rho + \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \varepsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon\nu\\ \rho\end{Bmatrix}A_\rho - A_\rho\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \rho\end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Formons le tenseur $A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu}$; dans cette différence, les termes symétriques en σ et ν disparaissent; dans le second terme

nous pouvons remplacer ρ par ε, de sorte que le deuxième et le troisième terme disparaissent aussi dans la différence ; il vient finalement

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} A_{\rho},$$

$$(61\text{-}13) \qquad \boxed{R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon\nu \\ \rho \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon\sigma \\ \rho \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \rho \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \rho \end{Bmatrix}}$$

Puisque $A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu}$ est un tenseur, et que A_{ρ} est un quadrivecteur covariant arbitraire, il résulte de la règle du quotient que $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ est un tenseur. C'est le *tenseur de Riemann-Christoffel* [1].

On peut lui associer un tenseur entièrement covariant, en faisant passer en bas l'indice ρ :

$$(62\text{-}13) \qquad R_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\rho\alpha} R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon\nu \\ \rho \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon\sigma \\ \rho \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \begin{bmatrix} \mu\sigma \\ \rho \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \rho \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \frac{\partial g_{\rho\varepsilon}}{\partial x_{\nu}} + \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \frac{\partial g_{\rho\varepsilon}}{\partial x_{\sigma}}$$

$$= - \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \rho\nu \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \rho\sigma \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \begin{bmatrix} \mu\sigma \\ \rho \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \rho \end{bmatrix}.$$

En développant les deux premiers termes de la dernière expression, on constate que $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ est symétrique gauche en μ et ρ ainsi qu'en ν et σ.

Il est essentiel de remarquer que ce tenseur appartient à la catégorie des tenseurs fondamentaux, puisqu'il n'est constitué que par les potentiels $g_{\mu\nu}$ du champ de gravitation (champ de force) et par leurs dérivées. En partant de ce tenseur nous pourrions former d'autres tenseurs d'ordres de plus en plus élevés, mais nous pouvons aussi obtenir par contraction de $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ un tenseur du second ordre : ce dernier présente un intérêt considérable.

Le tenseur contracté, covariant, du second ordre, s'obtient en égalant ρ et σ, il est symétrique et a pour expression

$$R_{\mu\nu} = - \frac{\partial}{\partial x_{\rho}} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \rho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu\rho \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\varepsilon \\ \rho \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \begin{Bmatrix} \mu\rho \\ \rho \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon\rho \\ \rho \end{Bmatrix}.$$

Les deux derniers termes se simplifient, d'après (53-13) et

---

[1] Désigné dans beaucoup d'ouvrages par $B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$. Le tenseur contracté est souvent indiqué par $G_{\mu\nu}$.

l'on a (¹)

$$(63\text{-}13)\qquad \boxed{R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \rho\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mu\rho\\ \varepsilon\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\varepsilon\\ \rho\end{matrix}\right\} + \frac{\partial^2 \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varepsilon\end{matrix}\right\}\frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_\varepsilon}}$$

Si nous choisissons les coordonnées de manière que $\sqrt{-g} = 1$, $R_{\mu\nu}$ se simplifie beaucoup, par disparition des deux derniers termes.

Il est à remarquer que le tenseur (63-13) est *le seul* tenseur qu'on puisse obtenir par contraction du tenseur de Riemann-Christoffel. En effet, d'une part, en faisant $\rho = \nu$, on obtient le même tenseur contracté, $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ étant symétrique en ν et σ; d'autre part, si l'on fait $\rho = \mu$, le résultat obtenu est identiquement nul car

$$R^{\mu}_{\mu\nu\sigma} = g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho} \equiv 0$$

puisque $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ est symétrique gauche en μ et ρ.

Le tenseur de Riemann-Christoffel, le tenseur contracté $R_{\mu\nu}$ et l'invariant contracté $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ jouent un rôle capital dans la théorie de la gravitation.

(¹) Pour les lecteurs qui ne seraient pas encore familiarisés avec la notation abrégée, indiquons les sommations; les indices muets sont ε et ρ, de sorte que la composante correspondant aux indices μ et ν est

$$R_{\mu\nu} = \sum_\rho -\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \rho\end{matrix}\right\} + \sum_\rho \sum_\varepsilon \left\{\begin{matrix}\mu\rho\\ \varepsilon\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\varepsilon\\ \rho\end{matrix}\right\} + \frac{\partial^2 \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \sum_\varepsilon \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varepsilon\end{matrix}\right\}\frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_\varepsilon}.$$

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DE LA GRAVITATION ET DYNAMIQUE.

Un champ de gravitation (au sens généralisé : champ de force) peut être modifié par un changement de système de référence, mais il n'en est pas moins vrai que la matière modifie l'Espace-Temps d'une façon absolue. L'univers possède, en chaque point, une *structure géométrique* connexe de la présence ou du voisinage de la matière; cette structure dépend des lignes d'Univers de toutes les portions de matière et d'énergie existante, car nous savons que toute substance est accompagnée d'un champ de gravitation *permanent*, un champ qu'il est impossible de faire disparaître *dans son ensemble* par un choix convenable du système de référence.

En d'autres termes, le système de référence est arbitraire, et le champ de force est relatif, en ce sens qu'il dépend du choix de ce système, mais la structure d'Univers en présence d'une distribution déterminée de matière est absolue, car cette structure ne saurait être changée par le fait qu'il plaît au mathématicien d'adopter tel ou tel système de coordonnées.

Il est donc évident que, dans un changement *arbitraire* de coordonnées, *les valeurs des potentiels* $g_{\mu\nu}$ *doivent rester compatibles avec une même structure d'Univers.* C'est dire que les $g_{\mu\nu}$ sont nécessairement assujettis à certaines liaisons.

Les équations les plus générales exprimant les liaisons qui doivent exister entre les dix potentiels de gravitation pour que ceux-ci, dans un changement arbitraire de coordonnées, se modifient en restant compatibles avec une même structure d'Univers, doivent être, comme toutes les lois physiques, des équations intrinsèques indépendantes de tout choix particulier de coordonnées.

Ces relations constituent la loi de la gravitation.

Pour résoudre ce problème, Einstein n'a eu que les données suivantes :

1° Les formules qui expriment les conditions générales auxquelles doivent satisfaire les dix potentiels $g_{\mu\nu}$ sont des relations tensorielles ;

2° A distance infinie de toute matière ou de tout rayonnement, l'Espace-Temps est euclidien ;

3° La loi générale de conservation de l'impulsion et de l'énergie doit être satisfaite.

Il est remarquable que ces conditions aient suffi pour déterminer la loi de la gravitation.

I. — LOI DE LA GRAVITATION DANS LE VIDE.

74. Signification du tenseur Riemann-Christoffel.

Lorsque l'Espace-Temps est euclidien, on peut choisir des coordonnées galiléennes ; les $g_{\mu\nu}$ étant constants, tous les symboles de Christoffel disparaissent et toutes les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ s'annulent ; mais alors ces composantes s'annulent aussi dans tout système de coordonnées (propriété fondamentale du caractère tensoriel).

L'équation

$$R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0 \tag{1-14}$$

exprime donc une condition nécessaire pour que l'Espace-Temps soit euclidien.

On a d'ailleurs démontré que cette condition, qui se réduit à 20 équations distinctes[1], est suffisante : lorsqu'elle est remplie, on peut mettre ds^2 sous la forme galiléenne ($g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$; $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$; $g_{44} = +1$).

Ainsi, *l'annulation du tenseur de Riemann-Christoffel exprime que l'Espace-Temps est euclidien.*

---

[1] Ceci résulte du fait que $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ est symétrique gauche en μ et ρ ainsi qu'en ν et σ.

Condition d'intégrabilité de la direction. — On peut envisager sous un autre aspect la signification du tenseur de Riemann-Christoffel.

Supposons d'abord un domaine euclidien à deux dimensions seulement, constitué par une surface plane. Nous savons que si un segment de droite a été tracé à partir d'un point A, on peut à partir d'un autre point B quelconque mener un segment parallèle au premier (postulatum d'Euclide). Mais si, au lieu d'un plan, nous considérons une surface courbe (domaine non euclidien à deux dimensions), la solution devient impossible; des êtres à deux dimensions, qui ne percevraient pas directement la troisième dimension de l'espace, confondant en chaque point la surface courbe avec son plan tangent, ne se rendraient pas compte immédiatement de l'impossibilité du problème et trouveraient que la direction qu'ils ont cru transporter en B parallèlement (au sens de la géométrie euclidienne) à la direction en A dépend du chemin qu'ils ont suivi entre A et B, et s'ils revenaient en A après avoir décrit un contour fermé, tout en cherchant à conserver la direction du vecteur, ils trouveraient au retour une direction différente de la direction initiale et qui dépendrait du chemin suivi. Autrement dit, sur une surface, la direction n'est en général pas intégrable.

Ces notions s'étendent à une multiplicité quadridimensionnelle. Soit A^{μ} un quadrivecteur, que nous supposons contrevariant; faisons lui décrire un circuit fermé par « déplacement parallèle » (au sens généralisé du n° 70), c'est-à-dire par déplacement tel que la dérivée covariante A^{μ}_{ν} soit constamment nulle :

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \begin{Bmatrix} \nu\alpha \\ \mu \end{Bmatrix} A^{\alpha} = 0. \tag{2-14}$$

La variation de ce vecteur est

$$[A^{\mu}]^{\text{final}}_{\text{initial}} = \delta A^{\mu} = \oint \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu} = -\oint \begin{Bmatrix} \nu\alpha \\ \mu \end{Bmatrix} A^{\alpha}\, dx_{\nu}. \tag{3-14}$$

Posons

$$dS^{\nu\sigma} = -dS^{\sigma\nu} = dx^{\nu}\, dx^{\sigma}, \tag{4-14}$$

$dS_{\nu\sigma}$ est un tenseur symétrique gauche qui fait correspondre à l'aire élémentaire une direction positive du parcours sur le con-

tour qui la limite. L'équation (3-14) s'écrit

$$\delta A^{\mu} = -\frac{1}{2}\int\int\left[\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\left(\left\{ {\nu\alpha \atop \mu} \right\} A^{\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\left(\left\{ {\sigma\alpha \atop \mu} \right\} A^{\alpha}\right)\right] dS^{\nu\sigma}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\int\left[A^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\left\{ {\nu\alpha \atop \mu} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\left\{ {\sigma\alpha \atop \mu} \right\}\right) - \left\{ {\nu\alpha \atop \mu} \right\}\left\{ {\sigma\rho \atop \alpha} \right\} A^{\rho} + \left\{ {\sigma\alpha \atop \mu} \right\}\left\{ {\nu\rho \atop \alpha} \right\} A^{\rho}\right] dS^{\nu\sigma};$$

$$\delta A^{\mu} = \frac{1}{2}\int\int R^{\mu}_{\rho\nu\sigma} A^{\rho}\, dS^{\nu\sigma} \tag{5-14}$$

et pour un contour infiniment petit

$$dA^{\mu} = \frac{1}{2} R^{\mu}_{\rho\nu\sigma} A^{\rho}\, dS^{\nu\sigma}. \tag{6-14}$$

Pour un quadrivecteur covariant A_{μ}, on trouverait de même

$$dA_{\mu} = \frac{1}{2} R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} A_{\rho}\, dS^{\nu\sigma}. \tag{7-14}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la variation soit nulle est $R^{\mu}_{\rho\nu\sigma} = 0$ (ou $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$).

Ainsi, pour que la direction soit intégrable, nous trouvons la même condition (nécessaire et suffisante) que pour que l'Espace-Temps soit euclidien. Par conséquent, l'intégrabilité de la direction est une propriété qui n'appartient qu'à l'Espace-Temps euclidien; la non-intégrabilité de la direction caractérise un Univers non euclidien, c'est-à-dire un champ de gravitation permanent [1].

75. Loi générale de la gravitation dans une région vide de matière et d'énergie électromagnétique (Loi d'Einstein).

L'équation $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$ n'exprime évidemment pas la loi générale que nous cherchons, car elle est beaucoup trop restreinte. Si c'était une loi naturelle, il ne pourrait y avoir qu'un Espace-

[1] Nous verrons plus tard que, de même que la non-intégrabilité de la direction caractérise le champ de gravitation, la non-intégrabilité de la longueur (généralisée) doit caractériser un champ d'une autre nature qui jouit précisément des

Temps euclidien *dans son ensemble*, et il n'y aurait nulle part de champ de gravitation permanent; la matière ne serait pas accompagnée d'un champ de gravitation [1]. Mais c'est un cas particulier; la loi (1-14) conviendrait dans une région de l'espace située à l'infini de toute masse.

Il faut chercher une relation tensorielle *plus générale, comportant la précédente comme cas particulier*, c'est-à-dire qui se trouve satisfaite lorsque $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$. On ne peut faire appel qu'au tenseur de Riemann-Christoffel contracté; on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= 0 \\ R^{\alpha}_{\mu} \equiv g^{\alpha\nu} R_{\mu\nu} &= 0 \\ R^{\alpha\beta} \equiv g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\mu\nu} &= 0 \\ R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} \big(\underbrace{g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}}_{\text{scalaire}}\big) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ même solution } R_{\mu\nu} = 0.$$

Quant à l'annulation du scalaire $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 0$, ce serait une condition trop générale, insuffisante pour déterminer un champ de gravitation.

On est donc conduit à la loi

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{8-14}$$

Mais cette loi est-elle la seule possible? oui, si l'on admet, ce qui a d'ailleurs été le point de départ, que l'espace est infini, qu'il peut y avoir des régions à l'infini de toute masse, et que par suite $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$ est une solution particulière.

Mais si l'Univers est *courbe* dans son ensemble, et si l'espace est fini, il n'est plus nécessaire de conserver $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$ comme solution limite, et la covariance est respectée si l'on pose

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 0, \tag{9-14}$$

λ étant une constante, d'ailleurs inconnue.

C'est la seule expression générale [2] d'un tenseur du second ordre fonction seulement des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées, ne contenant

---

[1] Il est clair que le champ produit par un centre matériel, par exemple, ne peut pas être annulé dans son ensemble, c'est-à-dire qu'on ne peut pas, par un choix convenable du système de coordonnées, rendre les $g_{\mu\nu}$ constants *en tout point*.

pas de dérivées d'ordre supérieur à 2, et linéaire par rapport aux dérivées secondes.

La loi $R_{\mu\nu} = 0$ a d'abord été adoptée par Einstein. Puis Einstein a été conduit plus tard à introduire le terme correctif $-\lambda g_{\mu\nu}$ parce qu'il y a, ainsi que nous le verrons, des difficultés insurmontables dans la conception d'un espace infini. Cependant, comme nous sommes certains que l'espace est immense, que loin de toute matière le champ permanent de gravitation est pratiquement nul, qu'il y a des régions où l'Univers peut, avec une très haute approximation, être considéré comme euclidien, nous pouvons affirmer que la constante λ est extrêmement petite, et le terme additionnel $-\lambda g_{\mu\nu}$ peut être négligé dans les applications au mouvement des astres.

Nous admettrons donc la loi $R_{\mu\nu} = 0$, quitte à revenir plus tard à la loi (9-14), ce qui nous conduira à remplacer le tenseur $R_{\mu\nu}$ par le tenseur $R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}$ ainsi que le scalaire $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ par le scalaire $R' = g^{\mu\nu} R'_{\mu\nu} = R - 4\lambda$. Ce remplacement n'apportera d'ailleurs aucun changement aux principes généraux de la Mécanique que nous allons bientôt exposer.

Pour être acceptée, la loi d'Einstein doit recevoir la confirmation de l'expérience. Combinée avec les équations du mouvement, elle doit comporter *en première approximation* l'ancienne loi, celle de Newton ; elle doit, de plus, rendre compte d'un écart connu à la loi de Newton, le déplacement du périhélie de la planète Mercure. Nous verrons que la loi d'Einstein satisfait entièrement à ces conditions.

Le tenseur $R_{\mu\nu}$ étant symétrique, l'annulation de ses composantes donne dix équations : six seulement de ces équations sont indépendantes; c'était à prévoir puisque dix équations indépendantes, auxquelles on joindrait les conditions aux limites, détermineraient tous les $g_{\mu\nu}$ dans l'expression de ds^2, et par conséquent spécifieraient non seulement la géométrie particulière du champ de gravitation (la structure de l'Univers), mais encore le système de coordonnées d'Univers. Ce système de coordonnées doit rester arbitraire; il est quatre fois indéterminé, ce qui correspond à quatre relations identiques entre les $g_{\mu\nu}$ (voir le numéro suivant). La loi de gravitation dans le vide comporte donc six conditions. C'est une restriction considérable imposée aux géométries de l'Univers.

Signalons dès maintenant que l'*invariant contracté* (nº 66) $R \doteq g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ est l'extension de la courbure de Gauss (nº 58), c'est, en chaque point-événement, la *courbure totale*. Pour éviter toute confusion, une remarque est nécessaire : la condition de courbure *totale* nulle $R = 0$ n'exprime pas la « planéité » de l'Univers, elle n'exprime pas que l'Espace-Temps est euclidien; les tenseurs $R_{\mu\nu}$ et $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ donnent une mesure bien plus précise des divergences entre l'Univers réel et l'Espace-Temps euclidien.

76. Théorème fondamental de la Mécanique [1].

La divergence de $R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R$ *est identiquement nulle.*

Ce théorème est d'une importance capitale. Dans l'espace tridimensionnel, l'annulation de la divergence d'un vecteur exprime la continuité du flux de ce vecteur; dans la théorie de l'Univers quadridimensionnel, où nous ajoutons une coordonnée de temps, l'annulation d'une divergence est la condition de *conservation* ou de *permanence*. Le théorème exprime la permanence du tenseur d'Univers considéré et nous verrons plus loin que, joint à la loi de gravitation, il a pour conséquence la conservation de l'impulsion et de l'énergie.

La dérivée covariante contractée ou divergence du tenseur

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R$$

est

$$R_{\mu\nu}^\nu - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_\mu},$$

car $g_\mu^\nu = 1$ pour $\mu = \nu$ et $g_\mu^\nu = 0$ pour $\mu \neq \nu$.

Nous allons vérifier que

$$R_{\mu\nu}^\nu \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_\mu}. \tag{10-14}$$

D'après (57-13) nous avons

$$R_{\mu\nu}^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (R_\mu^\nu \sqrt{-g}) + \frac{1}{2} R_{\sigma\rho} \frac{\partial g^{\sigma\rho}}{\partial x_\mu}.$$

---

[1] EDDINGTON, *Espace, Temps et Gravitation*, partie théorique, nº 38.

et comme $R = g^{\sigma\rho} R_{\sigma\rho}$,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \frac{\partial R_{\sigma\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} R_{\sigma\rho} \frac{\partial g^{\sigma\rho}}{\partial x_\mu};$$

il faut donc démontrer que

$$\text{(11-14)} \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (R_\mu^\nu \sqrt{-g}) \equiv \frac{1}{2} g^{\rho\rho} \frac{\partial R_{\sigma\rho}}{\partial x_\mu}.$$

Maintenant, sans particulariser en rien la structure de l'Univers, nous pouvons choisir nos coordonnées de façon que :

a. $\sqrt{-g} = 1$ *en tout point d'Univers.*

b. Les dérivées premières $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}$ s'annulent *au point considéré*, car ces conditions peuvent être remplies dans n'importe quel genre d'Univers [1]. Nous simplifions ainsi les expressions sans restreindre la généralité du théorème; en effet, la relation que nous voulons établir est une relation tensorielle et, si nous prouvons qu'elle est exacte pour un système de coordonnées particulier, nous savons qu'elle est encore exacte pour tout autre système de coordonnées dans le même Univers.

D'après *a*, le premier membre de (11) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\nu} R_\mu^\nu = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} R_\mu^\sigma = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (g^{\sigma\rho} R_{\mu\rho}) \\ = g^{\sigma\rho} \frac{\partial R_{\mu\rho}}{\partial x_\sigma} \quad \text{d'après } (b) \\ = g^{\sigma\rho} \frac{\partial R_{\mu\sigma}}{\partial x_\rho} \quad \text{en permutant } \sigma \text{ et } \rho. \end{aligned}$$

On peut donc remplacer (11) par

$$\text{(12-14)} \qquad \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial R_{\mu\rho}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial R_{\mu\sigma}}{\partial x_\rho} - \frac{\partial R_{\sigma\rho}}{\partial x_\mu} \right) \equiv 0.$$

Substituons à $R_{\mu\rho}$, etc. leurs valeurs d'après (63-13); d'après (*a*), les termes en Log $\sqrt{-g}$ disparaissent; d'après (*b*), les sym-

---

[1] Le système de coordonnées ainsi caractérisé est un système géodésique; c'est l'analogue exact du système de coordonnées rectilignes dans un Univers euclidien.

boles de Christoffel s'annulent au point considéré, mais leurs dérivées ne s'annulent pas. Le premier terme seul subsiste dans $R_{\mu\rho}$, etc. et l'expression (12-14) devient

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\sigma \partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\rho\\ \alpha\end{Bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial x_\rho \partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix} - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\sigma\rho\\ \alpha\end{Bmatrix}\right) \\
&= -\frac{1}{4} g^{\sigma\rho} g^{\beta\alpha}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\sigma \partial x_\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\right)\right. \\
&\qquad + \frac{\partial^2}{\partial x_\rho \partial x_\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\right) \\
&\qquad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}\left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x_\beta}\right)\right],
\end{aligned}
$$

car à cause de (b) $g^{\beta\alpha}$ se comporte comme une constante à l'égard de la double différentiation.

Huit des neuf termes du crochet se détruisent deux à deux soit directement, soit par changement d'indices muets ; il ne reste que le terme

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} g^{\sigma\rho} g^{\beta\alpha}\frac{\partial^3 g_{\sigma\rho}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha \partial x_\beta} \\
&= -\frac{1}{4} g^{\beta\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(g^{\sigma\rho}\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x_\mu}\right) \quad \text{d'après (6)} \\
&= -g^{\beta\alpha}\frac{1}{4}\frac{\partial^3(\operatorname{Log} g)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu} \quad \text{d'après (51-13)} \\
&= 0 \quad \text{puisque } g = -1 \text{ en tout point,}
\end{aligned}
$$

ce qui démontre le théorème.

Les quatre identités (10-14)

$$
(13\text{-}14) \qquad R^\nu_{1\nu} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x_1}; \quad R^\nu_{2\nu} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x_2}; \quad R^\nu_{3\nu} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x_3}; \quad R^\nu_{4\nu} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x_4}
$$

sont précisément les identités qui étaient à prévoir à cause de l'indétermination des quatre coordonnées (n° 75) et qui réduisent à six le nombre des équations indépendantes exprimant la loi de la gravitation.

Le même théorème s'applique au tenseur

$$
R'^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{2} g^\nu_\mu R' \qquad (R'^{\nu}_{\mu} = R^\nu_\mu - \lambda g^\nu_\mu);
$$

la divergence de ce tenseur est identiquement nulle.

On peut enfin, comme l'a fait Eddington [1], généraliser ce théorème. A tout invariant d'Univers on peut faire correspondre un tenseur mixte du second ordre dont la divergence soit nulle.

Le tenseur $R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} R$ est celui qui correspond au plus simple de tous les invariants d'Univers, l'invariant R qui par sa signification physique (courbure totale) présente un intérêt particulier.

77. Conditions d'application du principe d'équivalence.

La différence entre un Univers où règne un champ de gravitation permanent et un Espace-Temps euclidien est que dans le premier $R_{\mu\nu} = 0$, alors que dans le second on a les conditions beaucoup plus restreintes $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = 0$. Or ces deux groupes d'équations déterminent les dérivées secondes des $g_{\mu\nu}$ en fonction des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées premières; nous pouvons donc toujours trouver, en tout point-événement du champ de gravitation, un Univers euclidien caractérisé par des fonctions $g_{\mu\nu}$ ayant, en ce point, des valeurs respectivement égales aux $g_{\mu\nu}$ de l'Univers réel, et telles que les dérivées premières $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}$ soient aussi, au même point, respectivement égales aux dérivées premières des $g_{\mu\nu}$ de l'Univers réel. C'est seulement à partir des dérivées secondes que les deux Univers différeront.

C'est l'Univers euclidien ainsi défini qui est l'Univers tangent à l'Univers réel au point-événement considéré. Ces deux Univers admettent un contact du premier ordre en ce point.

Le principe d'équivalence (n° 55) n'est autre chose que l'affirmation de l'existence d'un Univers tangent en tout point de l'Univers réel. De ce principe, il résulte que toutes les lois relatives à des phénomènes se passant dans un Univers euclidien et qui ne dépendent que des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées premières [2]

---

[1] *Espace, Temps et Gravitation*, partie théorique, n° 45.

[2] Pour l'application de ce principe, il importe de remarquer qu'il peut se présenter des cas où des lois, établies dans l'Univers euclidien, paraissent ne pas contenir de dérivées secondes parce que celles-ci ont disparu dans l'Univers euclidien et, pour le système de coordonnées employé; il serait nécessaire, dans ce cas, de rétablir la forme tensorielle dans les équations générales.

seront également valables dans un champ de gravitation permanent. A ce point de vue, un champ de force « géométrique » dans un Univers euclidien, c'est-à-dire un champ où la force n'est que la manifestation de l'emploi d'un système de référence non galiléen, est *entièrement équivalent* à un champ de gravitation permanent (Univers non euclidien), c'est-à-dire à un champ dont la force ne peut disparaître par un choix convenable du système de coordonnées et qui est la marque de l'existence de matière ou d'énergie.

Par contre, pour les lois faisant intervenir les dérivées des $g_{\mu\nu}$, d'un ordre supérieur au premier, il n'y a plus nécessairement équivalence entre un champ de force géométrique dans un Univers euclidien et un champ de gravitation permanent.

On voit que le principe d'équivalence est fondé sur le choix de la loi de la gravitation. C'est un principe et non un axiome.

78. Équations des géodésiques d'Univers (trajectoires des mobiles libres). Expression des composantes du champ de force.

Puisque l'élément de ligne d'Univers ds est une grandeur indépendante du système de coordonnées, l'intervalle entre deux points-événements P_1 P_2 de l'Espace-Temps, sur la ligne pour laquelle $\int_{P_1}^{P_2} ds$ est stationnaire, a aussi une signification indépendante du système de référence. L'équation de cette ligne est

$$\delta \int ds = 0$$

dans tout système de coordonnées.

On pourrait exprimer cette condition d'action stationnaire par le calcul des variations ([1]), mais les formules de différentiation covariante nous conduiront immédiatement au résultat.

([1]) Voir EINSTEIN, *Ann. d. Physik*, t. 49, 1916, § 9, 10, 11, et EDDINGTON, *Espace, Temps et Gravitation*, partie théorique, n°s 20 et 21.

Si l'on établit directement, par le calcul des variations, les équations d'une géodésique, on peut en déduire l'expression de la dérivée covariante d'un vecteur. Ici nous suivons la marche inverse.

Soit A^σ le vecteur contrevariant $\frac{\partial x_\sigma}{ds}$. Sa dérivée covariante est donnée par (37-13)

$$A_\alpha^\sigma = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{dx_\sigma}{ds}\right) + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\beta}{ds}.$$

Multiplions par $A^\alpha = \frac{dx_\alpha}{ds}$, nous obtenons

$$A^\alpha A_\alpha^\sigma = \frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}. \tag{14-14}$$

Puisque le premier membre est un tenseur, il en est de même du second membre, et si ce tenseur s'annule dans un système de coordonnées, il s'annule dans tous les autres systèmes.

Supposons un Univers euclidien et prenons des coordonnées galiléennes. Les $g_{\mu\nu}$ étant constants, $\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} = 0$, et, d'autre part, $\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} = 0$ donne les équations d'une géodésique, car pour une « droite d'Univers » les coefficients de direction $\frac{dx_\sigma}{ds}$ sont constants. Par conséquent, le tenseur formant le second membre de (14-14) est nul en coordonnées galiléennes et par suite nul quel que soit le système de coordonnées pour tous les points d'une géodésique.

Nous voyons donc que les équations

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{dx} \frac{dx_\beta}{ds} \tag{15-14}$$

{ 4 équations pour $\sigma = 1, 2, 3, 4$. Dans chaque équation sommation par rapport à α et sommation par rapport à β.

sont les équations générales d'une géodésique, c'est-à-dire les équations de la trajectoire du point matériel libre dans un système de coordonnées quelconque, si l'Univers est euclidien.

Mais ces équations ne font intervenir que les dérivées premières des $g_{\mu\nu}$. *Elles restent donc exactes dans un champ de gravitation permanent* (principe d'équivalence, n° 77). Ce sont les équations fondamentales du mouvement du point libre dans un Univers quelconque, euclidien ou non. Elles sont covariantes pour toute transformation.

La ligne d'Univers d'un point matériel libre ne dépend pas de

la masse de ce point; elle ne dépend que des variations des $g_{\mu\nu}$ (et des conditions initiales).

Les $\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\}$ qui disparaissent dans le cas du mouvement de translation uniforme déterminent l'écart au mouvement rectiligne et uniforme. Einstein les a appelées « composantes du champ de gravitation ». Ce sont bien en effet des « forces » comme nous le montrerons bientôt.

79. Extension des équations de Lagrange.

Choisissons les coordonnées de manière que $(\sqrt{-g} = 1)$. Le tenseur de Riemann-Christoffel contracté s'écrit

$$\text{(16-14)} \qquad R_{\mu\nu} \equiv -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}.$$

Nous pouvons considérer $g^{\mu\nu}$ comme une coordonnée généralisée q et x_1, x_2, x_3, x_4 comme quatre variables indépendantes qui vont jouer le rôle que joue le temps dans les équations de Lagrange en mécanique ordinaire. La « vitesse généralisée » sera

$$\dot{q} = g^{\mu\nu}_{\alpha} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \qquad (g^{\mu\nu}_{\alpha} \text{ n'est pas un tenseur}).$$

Nous allons montrer que $R_{\mu\nu}$ s'écrit sous une forme semblable à celle des équations de Lagrange

$$\text{(17-14)} \qquad R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}}$$

en posant

$$\text{(18-14)} \qquad L = g^{mn} \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}.$$

Calculons, en effet, la variation de L. Nous avons

$$\text{(19-14)} \qquad \delta L = \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \delta g^{mn} + 2 g^{mn} \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \delta \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$$

puisque dans le dernier terme, m et n sont les indices muets. Nous pouvons écrire encore

$$\text{(20-14)} \qquad \delta L = -\left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \delta g^{mn} + 2 \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \delta \left(g^{mn} \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \right).$$

Nous avons d'ailleurs

$$(21\text{-}14)\qquad \delta\left(g^{mn}\left\{\begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix}\right\}\right) = \frac{1}{2}\,\delta\left[g^{mn}\,g^{\beta\lambda}\left(\frac{\partial x_{n\lambda}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_n} - \frac{\partial g_{\alpha n}}{\partial x_\lambda}\right)\right],$$

expression qui se simplifie beaucoup : d'abord les deux derniers termes de la parenthèse disparaissent après multiplication par $\left\{\begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix}\right\}$, car m et β, n et λ sont simultanément interchangeables. D'autre part, on a, d'après (47-13),

$$(22\text{-}14)\qquad g^{mn}\,g^{\beta\lambda}\frac{\partial g_{n\lambda}}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial g^{m\beta}}{\partial x_\alpha}.$$

On a donc finalement

$$(23\text{-}14)\qquad \delta L = -\left\{\begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix}\right\}\delta g^{mn} - \left\{\begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix}\right\}\delta g^{m\beta}_{\alpha}$$

et par suite

$$(24\text{-}14)\qquad \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} = -\left\{\begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix}\right\},$$

$$(25\text{-}14)\qquad \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} = -\left\{\begin{matrix} \mu\beta \\ \alpha \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \nu\alpha \\ \beta \end{matrix}\right\},$$

ce qui démontre la formule (17-14).

La loi de la gravitation dans le vide s'exprimant par $R_{\mu\nu} = 0$, les équations

$$(26\text{-}14)\qquad R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\qquad (q = g^{\mu\nu},\ \dot q = g^{\mu\nu}_{\alpha})$$

sont, comme en dynamique classique, équivalentes à

$$(27\text{-}14)\qquad \int L\, d\omega \quad \text{stationnaire} \qquad (d\omega = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4)$$

pour les variations des $g^{\mu\nu}$ et de leurs dérivées $g^{\mu\nu}_{\alpha}$. Il faut noter que cette équation est soumise à la restriction $\sqrt{-g} = 1$ [1].

80. Énergie du champ de gravitation.

Conservons encore des coordonnées telles que $\sqrt{-g} = 1$ et mul-

(1) On peut, par des calculs un peu plus longs (voir EDDINGTON, *Espace*,

tiplions (17-14) par $g^{\mu\nu}_{\beta} = \dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta}$, nous obtenons

$$g^{\mu\nu}_{\beta} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta}; \tag{28-14}$$

or, on peut écrire

$$\frac{\partial L}{\partial x_\beta} = \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} \frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_\beta} \tag{29-14}$$

et

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta \, \partial x_\alpha} = \frac{\partial g^{\mu\nu}_{\beta}}{\partial x_\alpha}. \tag{30-14}$$

On obtient donc, en ajoutant (28-14) et (29-14),

$$g^{\mu\nu}_{\beta} R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_{\beta} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\beta} = -2\varkappa \frac{\partial t^{\alpha}_{\beta}}{\partial x_\alpha} \tag{31-14}$$

en posant

$$-2\varkappa t^{\alpha}_{\beta} = g^{\mu\nu}_{\beta} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} - g^{\alpha}_{\beta} L, \tag{32-14}$$

$\varkappa$ étant une constante universelle (que nous déterminerons plus tard en fonction de la constante de la gravitation newtonienne).

La quantité t^{α}_{β} n'est pas un tenseur, mais elle est l'extension de l'expression hamiltonienne de l'énergie $\sum \dot{q} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$.

Dans l'espace vide, $R_{\mu\nu} = 0$, l'équation (31) devient

$$\frac{\partial t^{\alpha}_{\beta}}{\partial x_\alpha} = 0; \tag{33-14}$$

Temps, Gravitation, partie théorique, n° 44), mettre $R_{\mu\nu}$ sous la forme des équations de Lagrange en conservant des coordonnées complètement arbitraires c'est-à-dire sans imposer la restriction $\sqrt{-g} = 1$.

Il faut dans l'équation (26-14) remplacer L par

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g}\, g^{mn}\left(\begin{Bmatrix} m\beta \\ \alpha \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} mn \\ \beta \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \alpha \end{Bmatrix}\right)$$

et remplacer aussi $g_{\mu\nu}$ par $\mathfrak{g}_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}$ ainsi que $g^{\mu\nu}_{\alpha}$ par

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right),$$

on a alors

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}.$$

elle exprime la conservation de t_β^α. Pour le montrer, revenons à un Univers euclidien; intégrons (33) dans un volume déterminé par les coordonnées d'espace, nous obtenons, x_4 étant la coordonnée de temps,

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\iiint t_\beta^4\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = -\iiint\left(\frac{\partial t_\beta^1}{\partial x_1}+\frac{\partial t_\beta^2}{\partial x_2}+\frac{\partial t_\beta^3}{\partial x_3}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3$$
$$= \iint (t_\beta^1\,a_1+t_\beta^2\,a_2+t_\beta^3\,a_3)\,dS,$$

a_1, a_2, a_3 étant les cosinus directeurs de la normale (intérieure) à l'élément dS de la surface S qui limite le domaine d'intégration. Si t_β^α s'annule sur la surface, l'intégrale de volume de t_β^4 reste constante lorsque x_4 varie. Elle reste constante dans le temps, c'est-à-dire qu'elle obéit à une loi de conservation [1].

Les grandeurs t_β^α ont été appelées par Einstein « composantes d'énergie » du champ de gravitation.

Autre forme de la loi de la gravitation. — Nous pouvons maintenant donner à la loi de la gravitation $R_{\mu\nu}=0$ une forme nouvelle qui sera utile dans la suite. Multiplions par $g^{\nu\sigma}$ les termes de $R_{\mu\nu}$, nous avons

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} = g^{\nu\sigma}\begin{Bmatrix}\mu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}. \tag{34-14}$$

Le premier membre s'écrit

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\right) + g^{\nu\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}$$
$$+ g^{\sigma\beta}\begin{Bmatrix}\beta\alpha\\ \nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}. \tag{35-14}$$

---

[1] Ce résultat relatif à t_β^α envisagé seul est purement théorique, car, dans un champ de gravitation permanent, il y a nécessairement de la matière quelque part et les équations $\frac{\partial t_\beta^\alpha}{\partial x_\alpha}=0$ ne sont pas valables aux points où il y a de la matière. Nous verrons plus loin que la loi réelle de conservation (avec $\sqrt{-g}=1$)
$\partial(t_\beta^\alpha + T_\beta^\alpha)$

En changeant la désignation des indices, (35-14) s'écrit

$$(36\text{-}14)\qquad \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\begin{Bmatrix}\mu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}\right)+g^{mn}\begin{Bmatrix}m\beta\\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}n\mu\\ \beta\end{Bmatrix}+g^{\nu\sigma}\begin{Bmatrix}\mu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}.$$

Cette expression est le premier membre de l'équation (34-14), son troisième terme annule le second membre de l'équation; son deuxième terme est égal à

$$-\varkappa\left(t_\mu^\sigma-\frac{1}{2}g_\mu^\sigma t\right)\qquad \text{en posant}\qquad t=t_\alpha^\alpha\,(=t_1^1+t_2^2+t_3^3+t_4^4),$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier d'après (32), (18), (24).

On obtient donc finalement la loi de la gravitation dans le vide sous la forme

$$(37\text{-}14)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\begin{Bmatrix}\mu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}\right)=\varkappa\left(t_\mu^\sigma-\dfrac{1}{2}g_\mu^\sigma t\right)\cdot\\ \sqrt{-g}=1,\end{cases}$$

qui a l'avantage d'expliciter les composantes de l'énergie de gravitation.

II. — LOI DE LA GRAVITATION DANS LA MATIÈRE.

Il reste à résoudre un problème fondamental.

Les six équations $R_{\mu\nu}=0$ expriment seulement la loi de la gravitation dans une région vide de matière ou d'énergie électromagnétique. Ces équations remplacent l'équation bien connue de l'ancienne théorie (équation de Laplace) :

$$(38\text{-}14)\qquad \Delta\Omega=0,\qquad \left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

Ω étant le potentiel du champ newtonien.

Il s'agit maintenant de déterminer la loi qui doit remplacer la loi d'attraction proportionnelle à la masse et inversement proportionnelle au carré de la distance, loi traduite analytiquement par l'équation de Poisson

$$(39\text{-}14)\qquad \Delta\Omega=4\pi G\rho,$$

G étant la constante de la gravitation newtonienne, ρ la densité de la matière au point considéré.

La relativité restreinte a montré que la masse s'identifie avec l'énergie, et que l'énergie est la composante de temps de l'impulsion d'Univers (n° 46). Or, nous allons voir que l'impulsion-énergie trouve son expression la plus complète dans un tenseur qui, précisément, se réduit à la densité dans le cas de la matière au repos par rapport au système de référence, dans un Univers euclidien. Puisque toutes les lois doivent, d'après le principe de relativité généralisé, s'exprimer sous une forme tensorielle, il est à peu près évident que le tenseur impulsion-énergie doit remplacer la densité qui figurait seule dans l'ancienne théorie.

81. Le tenseur impulsion-énergie ou tenseur matériel.

Nous supposerons la matière *continue*, ce qui signifie que les considérations qui vont suivre s'appliquent à l'*aspect macroscopique* (ou aspect moyen) des phénomènes.

Isolons une portion de matière infiniment petite, de densité *propre* ρ_0 (densité qui serait mesurée par un observateur lié à la portion de matière). Si nous multiplions ρ_0 par tous les produits deux à deux des $\frac{dx_\sigma}{ds}$ $\left(c\frac{dx_\sigma}{ds} = \frac{dx_\sigma}{d\tau}\right.$ est la « vitesse généralisée » de la portion de matière dans le système de coordonnées $\left.x_\sigma\right)$, nous formons un tenseur contrevariant *symétrique* du second ordre

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}, \tag{40-14}$$

c'est le tenseur matériel ou tenseur impulsion-énergie contrevariant. A ce tenseur sont associés un tenseur mixte

$$T_\mu^\nu = g_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu} = g_{\mu\sigma}\rho_0 \frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}, \tag{41-14}$$

et un tenseur covariant

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} T^{\sigma\tau} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau}\rho_0 \frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\tau}{ds}. \tag{42-14}$$

l'absence d'un champ de gravitation (Espace-Temps euclidien) si l'on prend des coordonnées galiléennes X_1, X_2, X_3, X_4 [1].

Nous obtenons, en effet,

$$(43\text{-}14)\qquad ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \qquad (dX_4 = c\,dt),$$
$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \qquad g_{44} = +1, \qquad g_{\mu\sigma} = 0 \text{ pour } \mu \neq \sigma,$$
$$\sqrt{-g} = 1.$$

Posons, comme en relativité restreinte, $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, v étant la vitesse de la portion de matière dans le système galiléen (composantes v_{X_1}, v_{X_2}, v_{X_3}); nous avons

$$v_{X_1} = \frac{dX_1}{dt} = c\frac{dX_1}{dX_4} \cdots v_{X_4} = c, \qquad ds = \alpha\, dX_4, \qquad \rho_0 = \alpha^2 \rho,$$

ρ étant la densité mesurée dans le système galiléen considéré [2]. Le tenseur mixte, par exemple, s'écrit alors

$$(44\text{-}14)\quad T_\mu^\nu = g_{\mu\sigma}\rho\frac{dX_\sigma}{dX_4}\frac{dX_\nu}{dX_4} = \frac{1}{c^2}g_{\mu\sigma}\rho\frac{dX_\sigma}{dt}\frac{dX_\nu}{dt} = \frac{1}{c^2}g_{\mu\sigma}\rho\, v_{X_\sigma} v_{X_\nu}$$

ou, en donnant aux $g_{\mu\sigma}$ leurs valeurs galiléennes,

$$[g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\ g_{44} = +1,\ g_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu)],$$

$$(45\text{-}14)\quad \left\{\begin{array}{llll} T_\mu^\nu = -\frac{1}{c^2}\rho v_{X_1}^2 & -\frac{1}{c^2}\rho v_{X_1}v_{X_2} & -\frac{1}{c^2}\rho v_{X_1}v_{X_3} & -\frac{1}{c}\rho v_{X_1}, \\ \quad -\frac{1}{c^2}\rho v_{X_2}v_{X_1} & -\frac{1}{c^2}\rho v_{X_2}^2 & -\frac{1}{c^2}\rho v_{X_2}v_{X_3} & -\frac{1}{c}\rho v_{X_2}, \\ \quad -\frac{1}{c^2}\rho v_{X_3}v_{X_1} & -\frac{1}{c^2}\rho v_{X_3}v_{X_2} & -\frac{1}{c^2}\rho v_{X_3}^2 & -\frac{1}{c}\rho v_{X_3}; \\ \quad \frac{1}{c}\rho v_{X_1} & \frac{1}{c}\rho v_{X_2} & \frac{1}{c}\rho v_{X_3} & \rho \end{array}\right.$$

(flèche horizontale $\to \nu$, flèche verticale $\downarrow \mu$)

Les composantes T_4^ν (multipliées par c) sont les composantes de l'impulsion d'Univers (n° 46). Les autres composantes repré-

---

[1] Nous emploierons la notation X_μ pour distinguer les coordonnées *rigoureusement* galiléennes (qu'on ne peut employer que dans un champ de force rigoureusement nul) non seulement de coordonnées quelconques, mais aussi des coordonnées à peu près galiléennes employées en Mécanique quand il règne un champ de force.

[2] Soit, en effet, dV_0 le volume élémentaire de la portion de matière, mesuré

sentent (à un facteur constant près) des courants d'énergie et des courants de quantité de mouvement dans les trois directions des axes de coordonnées.

Le scalaire $T = T_\mu^\mu$ (invariant contracté) n'est autre chose que la densité au repos ρ_0; on a, en effet,

$$(46\text{-}14)\quad \begin{aligned} T_\mu^\mu &= \frac{1}{c^2} g_{\mu\sigma}\rho \frac{dX_\sigma}{dt}\frac{dX_\mu}{dt} \\ &= \frac{\rho}{c^2}\left[g_{11}\left(\frac{dX_1}{dt}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{dX_2}{dt}\right)^2 + g_{33}\left(\frac{dX_3}{dt}\right)^2\right] + g_{44}\rho \\ &= \rho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha^2\rho = \rho_0, \end{aligned}$$

résultat valable, bien entendu, dans n'importe quel système de coordonnées puisque T est un scalaire.

Lorsque la vitesse v est petite par rapport à la vitesse de la lumière, les composantes autres que T_4^4 sont négligeables par rapport à T_4^4, de sorte que le tenseur se réduit, en première approximation, à la densité $T_4^4 = \rho$, très voisine de ρ_0.

82. Les équations de la gravitation dans la matière.

Nous avons dit que le tenseur matériel doit remplacer la densité dans l'expression de la loi de la gravitation. Il suffit de se reporter à la loi dans le vide, sous la forme (37-14) où l'énergie de gravitation est mise en évidence, pour comprendre comment il faut maintenant introduire le tenseur matériel. Nous devons penser que l'énergie de gravitation est équivalente à toute autre forme d'énergie : donnant alors à la constante $\varkappa$ [équation (37-14)] des dimensions telles que t_μ^σ représente une densité (énergie par unité

---

dans le système de cette portion de matière, on a

$$m_0 = \rho_0\, dV_0, \qquad m = \rho\, dV;$$

or

$$dV = \alpha\, dV_0 \qquad \text{(contraction du volume)}$$

et

$$m = \frac{m_0}{\alpha} \qquad \text{(accroissement de masse).}$$

Donc

$$\rho\, dV = \frac{m_0}{\alpha} = \frac{\rho_0\, dV_0}{\alpha} = \frac{\rho_0\, dV}{\alpha^2}, \qquad \rho_0 = \alpha^2\rho.$$

de volume, divisée par c^2), c'est-à-dire telles que t_μ^σ soit homogène à T_μ^σ, nous sommes logiquement conduits à ajouter les composantes du tenseur matériel aux composantes de l'énergie de gravitation. Nous remplaçons donc t_μ^σ par $t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma$, et t par $t+T$ ($T = T_\mu^\mu = \rho_0$).

Nous obtenons ainsi, pour la loi de gravitation dans la matière (supposée continue), l'équation

$$(47\text{-}14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\begin{Bmatrix}\mu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}\right) = \varkappa\left[(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma) - \dfrac{1}{2}g_\mu^\sigma(t+T)\right], \\ \sqrt{-g} = 1, \end{cases}$$

qui s'écrit, après quelques transformations, d'après (16-14) et (36-14),

$$(48\text{-}14)\qquad \begin{cases} g^{\nu\sigma}R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_\mu^\sigma - \dfrac{1}{2}g_\mu^\sigma T\right) \\ \text{ou} \\ R_\mu^\sigma = -\varkappa\left(T_\mu^\sigma - \dfrac{1}{2}g_\mu^\sigma T\right) \end{cases}$$

ou encore

$$(49\text{-}14)\qquad \boxed{R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)}$$

C'est la loi cherchée, qui remplace l'équation de Poisson.

Dans les équations (48) et (49) *la restriction* $\sqrt{-g} = 1$ *est levée :* ce sont des équations covariantes, qui sont exactes dans tous les systèmes de coordonnées imaginables si elles sont vraies dans un système particulier.

La loi de la gravitation peut s'écrire sous d'autres formes en introduisant la courbure $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Multiplions (49) par $g^{\mu\nu}$, il vient d'abord

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}T\right)$$

ou

$$(50\text{-}14)\qquad \boxed{R = \varkappa T = \varkappa\rho_0}$$

car

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4 \qquad \text{et} \qquad g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = T.$$

Remplaçant maintenant $\varkappa T$ par R dans (50), nous obtenons la

nouvelle forme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu} \tag{51-14}$$

Enfin, une dernière forme est la suivante. Remplaçons dans l'équation précédente ν par τ et multiplions par $g^{\tau\nu}$, il vient

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} R = -\varkappa T^{\nu}_{\mu} \tag{52-14}$$

L'introduction, telle qu'elle vient d'être faite, du tenseur matériel, n'est pas exigée par le principe de la relativité *seul;* nous avons admis, en outre, que l'énergie du champ de gravitation et l'énergie matérielle ont même action gravifique. Nous allons maintenant donner la meilleure justification de la loi d'Einstein en montrant qu'elle implique la conservation de l'impulsion et de l'énergie.

83. La conservation de l'impulsion et de l'énergie.

La loi d'Einstein, sous la forme (52-14), exprime l'égalité du tenseur mixte impulsion-énergie (multiplié par $-\varkappa$) et du « *tenseur d'Univers conservatif* » $\left(R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} R\right)$. La loi d'Einstein entraîne donc, par application du théorème fondamental de la Mécanique (n° 76), la permanence du tenseur matériel, c'est-à-dire la loi de conservation de l'impulsion-énergie sous la forme la plus générale

$$T^{\nu}_{\mu.\nu} = 0. \tag{53-14}$$

Pour mieux comprendre que cette équation exprime la conservation, nous allons la présenter sous une autre forme. Écrivons l'expression de la divergence de T^{ν}_{μ}; le tenseur $T^{\mu\nu}$ étant symétrique, nous avons, d'après (57-13), (59-13),

$$\mathfrak{T}^{\nu}_{\mu.\nu} = \frac{\partial \mathfrak{T}^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \qquad (\mathfrak{T} \text{ densité tensorielle})$$

ou

$$T^{\nu}_{\mu.\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\sqrt{-g}\, T^{\nu}_{\mu}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} T_{\alpha\beta}$$

La loi $T^{\nu}_{\mu\nu} = 0$ s'écrit donc

$$(54\text{-}14) \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\sqrt{-g}\, T^{\nu}_{\mu}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} T_{\alpha\beta}.$$

Choisissons d'abord des coordonnées telles que $\sqrt{-g} = 1$.

L'équation (54-14) se simplifie et devient

$$(55\text{-}14) \qquad \frac{\partial T^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} T_{\alpha\beta}.$$

Reportons-nous maintenant à la définition de t^{α}_{β}, c'est-à-dire à l'équation (31-14) :

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} R_{\mu\nu} = -2\varkappa \frac{\partial t^{\alpha}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}},$$

nous pouvons écrire

$$-2\varkappa \frac{\partial t^{\alpha}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} R_{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right),$$

car, lorsque $g = -1$, $g_{\mu\nu}\, dg^{\mu\nu} = 0$.

Appliquons, enfin, la loi de la gravitation en remplaçant $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ par $-\varkappa T_{\mu\nu}$ (51-14), nous obtenons

$$\frac{\partial t^{\alpha}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} T_{\mu\nu}$$

$$= -\frac{\partial T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}, \qquad \text{d'après (55-14)},$$

finalement,

$$(56\text{-}14) \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (T^{\alpha}_{\beta} + t^{\alpha}_{\beta}) = 0}$$

Cette équation étant soumise à la restriction $\sqrt{-g} = 1$.

Par introduction de la densité tensorielle $\mathfrak{T}^{\alpha}_{\beta} = \sqrt{-g}\, T^{\alpha}_{\beta}$ et de la densité d'énergie de gravitation $\mathbf{t}^{\alpha}_{\beta}$, on peut conserver la forme (56-14), en levant la restriction $\sqrt{-g} = 1$.

Nous avons, en effet,

$$\mathfrak{T}^{\alpha}_{\beta\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{T}^{\alpha}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \mathfrak{T}_{\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{T}^{\alpha}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \left[-\frac{1}{\varkappa} \left(\mathfrak{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathfrak{R} \right) \right] = 0,$$

Nous obtenons donc

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{T}^\alpha_\beta + \mathfrak{t}^\alpha_\beta\right) = 0} \tag{56'-14}$$

en posant [1]

$$-2\varkappa \frac{\partial \mathfrak{t}^\alpha_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{R}\right).$$

Les quatre équations résumées dans (56'-14)

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathfrak{T}^1_1 + \mathfrak{t}^1_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathfrak{T}^2_1 + \mathfrak{t}^2_1) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\mathfrak{T}^3_1 + \mathfrak{t}^3_1) + \frac{\partial}{\partial x_4}(\mathfrak{T}^4_1 + \mathfrak{t}^4_1) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathfrak{T}^1_2 + \mathfrak{t}^1_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathfrak{T}^2_2 + \mathfrak{t}^2_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\mathfrak{T}^3_2 + \mathfrak{t}^3_2) + \frac{\partial}{\partial x_4}(\mathfrak{T}^4_2 + \mathfrak{t}^4_2) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathfrak{T}^1_3 + \mathfrak{t}^1_3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathfrak{T}^2_3 + \mathfrak{t}^2_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\mathfrak{T}^3_3 + \mathfrak{t}^3_3) + \frac{\partial}{\partial x_4}(\mathfrak{T}^4_3 + \mathfrak{t}^4_3) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathfrak{T}^1_4 + \mathfrak{t}^1_4) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathfrak{T}^2_4 + \mathfrak{t}^2_4) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\mathfrak{T}^3_4 + \mathfrak{t}^3_4) + \frac{\partial}{\partial x_4}(\mathfrak{T}^4_4 + \mathfrak{t}^4_4) = 0
\end{aligned}\right. \tag{57-14}$$

(où $\mathfrak{T}^\alpha_\beta$ et $\mathfrak{t}^\alpha_\beta$ doivent être remplacés par T^α_β et t^α_β lorsque $\sqrt{-g} = 1$) expriment la loi générale de conservation de l'impulsion-énergie $(\mathfrak{T}^\alpha_\beta + \mathfrak{t}^\alpha_\beta)$ quand il y a action réciproque de la matière et du champ de gravitation. La démonstration a été faite au n° **80**; il n'y a qu'à remplacer dans cette démonstration t^α_β par $\mathfrak{t}^\alpha_\beta + \mathfrak{T}^\alpha_\beta$.

Si nous supposons un système clos où le champ de gravitation soit négligeable, nous pouvons prendre des coordonnées galiléennes et les quatre équations qui précèdent (où les t^α_β sont nuls), qui ne sont autres que les équations bien connues de l'hydrodynamique (*voir* numéro suivant), expriment la conservation de l'impulsion d'Univers au sens de la relativité restreinte (n° **47**).

Si le champ de gravitation n'est pas négligeable, la loi $T^\nu_{\mu,\nu} = 0$ exprime la conservation de l'ensemble du tenseur matériel et de l'énergie de gravitation, c'est-à-dire que toute variation du tenseur impulsion-énergie de la matière peut être considérée comme

---

(1) L'expression de $\mathfrak{t}^\alpha_\beta$ est

$$\mathfrak{t}^\alpha_\beta = -\frac{1}{2\varkappa}\left(g^{\mu\nu}_\beta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha} - g^\alpha_\beta \mathfrak{L}\right)$$

avec

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g}\, g^{mn}\left(\{m\beta\}\{n\alpha\} - \{mn\}\{\alpha\beta\}\right) \qquad \text{(voir note du n° 79)}$$

empruntée ou cédée au champ de gravitation. Il n'y a plus conservation de l'impulsion-énergie *matérielle*, mais pour maintenir la loi de conservation, nous attribuons au champ de gravitation une énergie $\mathfrak{t}_\mu^\nu$ équivalente à toute autre forme d'énergie.

En posant $R_{\mu\nu} = 0$ dans le vide, mettant cette équation sous la orme (37-14), puis ajoutant à t_μ^σ le tenseur matériel T_μ^σ (47-14), nous avons suivi la voie indiquée par Einstein dans sa découverte de la loi de la gravitation [1].

On peut présenter autrement la question. La conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie sont des lois expérimentales, vérifiées dans tous les phénomènes connus.

L'expression la plus générale de ces lois est facile à trouver : si le champ de gravitation est négligeable nous pouvons exprimer ces lois de conservation par

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x_\nu} = 0, \tag{58-14}$$

car cette équation symbolise les équations de l'hydrodynamique en coordonnées galiléennes.

Nous remarquons que cette équation est la forme *dégénérée* (en coordonnées galiléennes) de l'équation *tensorielle* $T_{\mu\nu}^\nu = 0$. La formule $T_{\mu\nu}^\nu = 0$ doit donc exprimer la loi générale de conservation, que nous avons toutes raisons de considérer comme rigoureuse.

Ceci posé, la loi de gravitation que nous cherchons est (comme la formule de Poisson) une relation entre la matière et la structure d'Univers : elle doit s'exprimer par une égalité entre le tenseur matériel et un certain tenseur de courbure. Le choix de ce tenseur géométrique est très restreint, car pour pouvoir être égalé au tenseur matériel il doit être conservatif comme lui. Le plus simple des tenseurs conservatifs est $R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R$ (théorème fondamental n° 76); nous sommes donc conduits à essayer la loi :

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R = -\varkappa T_\mu^\nu \qquad (\varkappa \text{ constante universelle}),$$

---

[1] *Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts theorie* (*Ann. d. Physik*, t. XLIX, 1916).

quitte à vérifier ensuite expérimentalement les conséquences de cette loi. C'est bien la loi d'Einstein (52-14).

Partant de la forme précédente, nous obtenons facilement les autres formes de la loi, y compris (47-14), qui nous montre que les quantités t_μ^ν (bien que ne constituant pas un tenseur) peuvent être considérées comme représentant une forme d'énergie que nous pouvons appeler l'énergie du champ de gravitation. Cette conclusion relative aux t_μ^ν est d'ailleurs justifiée par les formules (32-14) et (17-14) (extension des équations de Lagrange).

Eddington regarde la loi de la gravitation « non comme une loi de la Nature, mais comme une définition de la signification que nous attribuons à la masse, à la quantité de mouvement, etc., dans notre description géométrique de l'Univers. L'identification a été faite de telle sorte que l'équation $T_{\mu,\nu}^\nu = 0$ soit satisfaite et que, par conséquent, les lois de l'hydrodynamique et de la théorie des gaz soient également vérifiées ». Cette idée d'une « *identification* » sera discutée plus tard.

La loi de la gravitation n'est pas déterminée d'une manière univoque : nous pouvons écrire aussi

$$R_\mu'^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R' = -\varkappa T_\mu^\nu,$$

en posant

$$R_\mu'^\nu = R_\mu^\nu - \lambda g_\mu^\nu, \qquad R' = R - 4\lambda, \qquad \lambda = \text{const. universelle},$$

puisque la divergence de $R_\mu'^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R'$ est identiquement nulle (n° 76).

Dans le vide, c'est-à-dire aux points d'Univers où il n'y a pas de tenseur d'énergie, on obtient alors

$$R_\mu'^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

C'est la loi (9-14) (Univers courbe) que nous adopterons bientôt (avec λ très petit). On voit que cette loi est encore compatible avec la loi de conservation de l'impulsion-énergie.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé l'abse c de

y a un champ électromagnétique, un autre tenseur doit être ajouté au tenseur matériel.

En résumé, la loi de la gravitation et la loi de conservation de l'impulsion-énergie sont étroitement unies. La loi de conservation est imposée par la loi d'Einstein, d'autre part celle-ci peut être écrite intuitivement en partant de la loi de conservation.

Remarquons toutefois qu'on pourrait, *a priori*, égaler le tenseur d'énergie à tout autre tenseur d'Univers ayant une divergence nulle (n° 76), par exemple avec les tenseurs mixtes conservatifs qui correspondent aux invariants $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}R^{\mu\nu\sigma}_{\rho}$. On aurait d'autres lois de gravitation compatibles encore avec la conservation de l'impulsion-énergie. Mais les tenseurs en question contiennent les dérivées du quatrième ordre des $g_{\mu\nu}$; la loi dans le vide serait un groupe d'équations différentielles du quatrième ordre, et une difficulté proviendrait des conditions aux limites indispensables pour déterminer la solution particulière convenant au champ d'une particule matérielle. La loi choisie (avec ou sans la constante λ) est la plus simple qu'on puisse adopter, elle comporte le minimum d'arbitraire, et il se trouve que dans les limites de précision des observations, cette loi est expérimentalement vérifiée.

84. Les équations de l'hydrodynamique.

Revenons au tenseur impulsion-énergie, dont l'expression en coordonnées galiléennes est (45-14). Nous pouvons, dans l'aspect macroscopique, considérer comme très petit un fragment de matière dans lequel s'exercent des tensions internes, c'est-à-dire dans lequel diverses portions de matière ont des vitesses de grandeurs et d'orientations différentes. Pour tenir compte de ces tensions internes, nous pouvons décomposer le tenseur en deux parties, la première se rapportant au mouvement d'ensemble du fragment de matière, de vitesse v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, la seconde relative aux mouvements internes v'_{x_1}, v'_{x_2}, v'_{x_3} par rapport au centre d'inertie. Les termes rectangles s'annulent puisque les vitesses internes sont relatives au centre d'inertie. $\Sigma\rho\, v_{x_\alpha} v_{x_\beta}$ est la quantité de mouvement parallèle à l'axe OX_α qui traverse, par unité de

sément la tension interne $p_{x_\alpha x_\beta}$. Ainsi, il faut ajouter au tenseur (45-14) un *tenseur d'espace* à neuf composantes (le tenseur de la théorie de l'élasticité), ayant pour éléments les tensions internes. Nous obtenons

$$(59\text{-}14)\quad \left\{\begin{array}{llll} T_\mu^\nu = -\frac{1}{c^2}(p_{x_1x_1}+\rho v_{x_1}^2) & -\frac{1}{c^2}(p_{x_1x_2}+\rho v_{x_1}v_{x_2}) & -\frac{1}{c^2}(p_{x_1x_3}+\rho v_{x_1}v_{x_3}) & -\frac{1}{c}\rho v \\ \quad -\frac{1}{c^2}(p_{x_2x_1}+\rho v_{x_2}v_{x_1}) & -\frac{1}{c^2}(p_{x_2x_2}+\rho v_{x_2}^2) & -\frac{1}{c^2}(p_{x_2x_3}+\rho v_{x_2}v_{x_3}) & -\frac{1}{c}\rho v \\ \quad -\frac{1}{c^2}(p_{x_3x_1}+\rho v_{x_3}v_{x_1}) & -\frac{1}{c^2}(p_{x_3x_2}+\rho v_{x_3}v_{x_2}) & -\frac{1}{c^2}(p_{x_3x_3}+\rho v_{x_3}^2) & -\frac{1}{c}\rho v \\ \quad \frac{1}{c}\rho v_{x_1} & \frac{1}{c}\rho v_{x_2} & \frac{1}{c}\rho v_{x_3} & \rho. \end{array}\right.$$

(ν →, μ ↓)

En coordonnées galiléennes (ce qui suppose l'absence de champ de force), les quatre équations de conservation s'écrivent

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4).$$

Faisons d'abord $\mu = 4$, nous obtenons l'équation de continuité bien connue

$$(60\text{-}14)\qquad \frac{\partial(\rho v_{x_1})}{\partial X_1} + \frac{\partial(\rho v_{x_2})}{\partial X_2} + \frac{\partial(\rho v_{x_3})}{\partial X_3} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Prenant $\mu = 1, 2, 3$, nous obtenons les trois autres équations; faisons par exemple $\mu = 1$, nous avons

$$-\left(\frac{\partial p_{x_1x_1}}{\partial X_1} + \frac{\partial p_{x_1x_2}}{\partial X_2} + \frac{\partial p_{x_1x_3}}{\partial X_3}\right) = \frac{\partial(\rho v_{x_1}^2)}{\partial X_1} + \frac{\partial(\rho v_{x_1}v_{x_2})}{\partial X_2} + \frac{\partial(\rho v_{x_1}v_{x_3})}{\partial X_3} + \frac{\partial(\rho v_{x_1})}{\partial t}$$

ou, en tenant compte de l'équation précédente,

$$(61\text{-}14)\quad -\left(\frac{\partial p_{x_1x_1}}{\partial X_1} + \frac{\partial p_{x_1x_2}}{\partial X_2} + \frac{\partial p_{x_1x_3}}{\partial X_3}\right) = \rho\left(v_{x_1}\frac{\partial v_{x_1}}{\partial X_1} + v_{x_2}\frac{\partial v_{x_1}}{\partial X_2} + v_{x_3}\frac{\partial v_{x_1}}{\partial X_3} + \frac{\partial v_{x_1}}{\partial t}\right) = \rho\frac{Dv_{x_1}}{Dt},$$

où $\frac{Dv_{x_1}}{Dt}$ est l'accélération de la matière.

Nous trouvons donc les équations du mouvement d'un fluide, le champ de force étant nul. Les équations de l'hydrodynamique

(en coordonnées galiléennes) ne sont autres que les équations de conservation $\frac{\partial T^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0$, formes dégénérées de $T^{\nu}_{\mu\nu} = 0$.

Quand il y a un champ de force, nous savons (Mécanique ordinaire) qu'on introduit les composantes de la force sur l'unité de volume ρF_{x_1}, ρF_{x_2}, ρF_{x_3}; les équations prennent la forme

$$(62\text{-}14) \qquad \frac{\partial T^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = -\left(\frac{\rho}{c^2} F_{x_1}, \frac{\rho}{c^2} F_{x_2}, \frac{\rho}{c^2} F_{x_3}, 0\right).$$

Les coordonnées ne sont plus rigoureusement des coordonnées galiléennes car il n'y a plus de coordonnées galiléennes dans un champ de force, mais c'est un fait dont on ne tient pas compte dans la Mécanique classique.

85. Les forces.

Écrivons l'expression de la divergence de T^{ν}_{μ} :

$$T^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\sqrt{-g}\, T^{\nu}_{\mu}) - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} T^{\nu}_{\alpha}.$$

La loi de conservation est

$$(63\text{-}14) \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \mathfrak{T}^{\nu}_{\alpha},$$

et dans le cas particulier où les coordonnées sont choisies de manière que $\sqrt{-g} = 1$,

$$(64\text{-}14) \qquad \frac{\partial T^{\nu}_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} T^{\nu}_{\alpha}.$$

Sous cette forme, la loi de conservation constitue l'expression de la loi d'impulsion et d'énergie pour la matière : le second membre (qui disparaît quand les $g_{\mu\nu}$ sont constants, c'est-à-dire quand le champ de force est nul) représente l'influence énergétique de la gravitation sur la matière, c'est-à-dire détermine l'impulsion et l'énergie communiquées à la matière par le champ de force (champ de gravitation permanent ou champ de gravitation géométrique).

Ces équations imposent quatre conditions (pour $\mu = 1, 2, 3, 4$) que le tenseur matériel doit satisfaire.

Ce sont les équations de l'hydrodynamique dans un champ de force et pour les milieux dépourvus de frottement.

En pratique, la vitesse de la matière est toujours très petite par rapport à la vitesse de la lumière, et nous pouvons faire une approximation. Nous pouvons prendre des coordonnées très peu différentes de coordonnées galiléennes, et admettre que le tenseur matériel se réduit à T_4^4, cette composante étant considérablement plus grande que les autres composantes de T_α^ν; nous écrivons donc approximativement :

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x_\nu} = \left\{ \begin{matrix} \mu 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} T_4^4 = \left\{ \begin{matrix} \mu 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} \rho, \tag{65-14}$$

c'est l'approximation faite en Mécanique ordinaire.

Nous avons déjà appelé « composantes du champ » (n° 78) les grandeurs représentées par les symboles $\left\{ \; \right\}$ de Christoffel. Comparant (65-14) aux équations habituelles de l'hydrodynamique dans un champ de force (62-14), nous voyons bien que ces symboles représentent des forces (divisées par c^2)

$$\left\{ \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 24 \\ 4 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 34 \\ 4 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{c^2} F_{x_1}, \; -\frac{1}{c^2} F_{x_2}, \; -\frac{1}{c^2} F_{x_3}.$$

Ces trois symboles (multipliés par $-c^2$) sont les composantes de la force principale, *la force d'inertie de la Mécanique, la seule qu'on envisage en Mécanique classique*, qui produit sur la matière une action proportionnelle à la masse, c'est-à-dire proportionnelle à l'énergie ; la Mécanique newtonienne néglige les autres « forces » qui sont liées aux autres composantes du tenseur T_μ^ν, c'est-à-dire à la quantité de mouvement et aux tensions.

Les équations habituelles de l'hydrodynamique (dans un champ de force) ne constituent donc qu'une approximation, d'ailleurs excellente.

Écrivons maintenant la divergence de T_μ^ν sous la forme (56-13), avec $\sqrt{-g} = 1$, nous obtenons

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\mu} \text{ approximativement.} \tag{66-14}$$

Nous voyons que

$$(67\text{-}14)\qquad F_{x_1},\ F_{x_2},\ F_{x_3} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1},\ -\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2},\ -\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3}.$$

Si F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3} dérivent d'un potentiel Ω (au sens de la Mécanique classique), la solution de (67-14) est

$$\Omega = \frac{c^2}{2} g_{44} + \text{const.},$$

et si $\Omega = 0$ à l'infini, et $g_{44} = 1$,

$$(68\text{-}14)\qquad g_{44} = 1 + \frac{2\Omega}{c^2}.$$

Nous avions déjà remarqué cette relation au nº 60, dans la transformation de coordonnées relative à un système tournant (champ de force centrifuge).

86. Les équations du mouvement du point matériel, en Mécanique classique, déduites, en première approximation, des équations de la géodésique [1].

Dans un Univers supposé euclidien, on peut choisir des coordonnées galiléennes de manière à avoir

$$(69\text{-}14)\qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\qquad g_{44} = 1,\qquad g_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu,$$

c'est la suppression totale du champ de force.

Dans la réalité, à distance finie de la matière, il y a toujours un champ de gravitation permanent, mais l'Univers est très peu déformé. Nous savons, de plus, qu'au champ de gravitation permanent peut se superposer un champ de gravitation « géométrique » qui n'est autre que la manifestation de l'état de mouvement du système de référence. Le champ de gravitation permanent disparaît à distance infinie de toute matière et le champ de gravitation géométrique est nul si l'on adopte un système de référence dans lequel les coordonnées deviennent galiléennes à l'infini.

Nous allons considérer le cas où les $g_{\mu\nu}$ diffèrent très peu des

valeurs galiléennes (69-14); nous négligerons les quantités de l'ordre du carré des différences; nous supposerons que les $g_{\mu\nu}$ tendent vers les valeurs galiléennes à mesure qu'on s'éloigne de toute matière, c'est-à-dire qu'on adopte un système de référence galiléen à l'infini.

Les vitesses de la matière étant toujours, dans la réalité, très petites par rapport à c, les composantes d'espace $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$, $\frac{dx_3}{ds}$ du quadrivecteur du mouvement sont toujours très petites par rapport à la composante de temps $\frac{dx_4}{ds}$; cette dernière peut être prise égale à 1, aux quantités du second ordre près.

Les forces $\left\{ {\alpha\beta \atop \sigma} \right\}$ sont très petites, ce sont des grandeurs du premier ordre au moins.

Soient alors les équations d'une géodésique (15-14)

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} = -\left\{ {\alpha\beta \atop \sigma} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}.$$

Nous pouvons nous contenter de considérer les termes pour lesquels $\alpha = \beta = 4$, et nous pouvons remplacer ds par dx_4, les $g_{\sigma\tau}$ par les valeurs galiléennes. Nous obtenons ainsi

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{d^2 x_\sigma}{dt^2} &= \begin{bmatrix} 44 \\ \sigma \end{bmatrix} \\ \frac{1}{c^2}\frac{d^2 x_4}{dt^2} &= \begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (\sigma = 1, 2, 3).$$

Lorsque le champ de gravitation est quasi statique, c'est-à-dire lorsqu'on n'envisage que le cas où la matière, source du champ de gravitation, n'est animée (dans le système de référence employé) que d'une vitesse très petite par rapport à la vitesse de la lumière, on peut négliger les dérivées des $g_{\mu\nu}$ par rapport à x_4 vis-à-vis des dérivées par rapport aux coordonnées d'espace, et l'on obtient simplement

$$\text{(70-14)} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{d^2 x_\sigma}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, 3).$$

Ce sont bien les équations de la trajectoire du point libre en Mécanique classique, à condition d'identifier, à une constante

Ω étant le potentiel, au sens de la Mécanique ordinaire,

$$\Omega = \frac{c^2}{2} g_{44} + \text{const.}$$

et, puisque à l'infini, $\Omega = 0$ et $g_{44} = 1$,

$$g_{44} = 1 + \frac{2\Omega}{c^2}. \tag{71-14}$$

Il est remarquable que la composante g_{44} du tenseur fondamental donne à elle seule, en première approximation, le mouvement du point matériel.

87. La loi du mouvement du point matériel libre est contenue dans la loi de la gravitation.

La relation (71-14) qui vient d'être établie (en première approximation) est identique à celle que nous avons déduite (68-14) de la loi de conservation de l'impulsion-énergie, au même degré d'approximation.

Ce résultat nous laisse penser qu'*il n'y a pas indépendance entre la loi de conservation et la loi suivant laquelle un point matériel libre a pour ligne d'Univers une géodésique.*

Jetons un coup d'œil en arrière sur la suite des idées. Nous sommes partis de la loi galiléenne d'inertie : un point matériel libre dans un espace-temps *euclidien*, repéré dans un système *galiléen*, décrit une droite d'un mouvement uniforme; sa ligne d'Univers est donc une géodésique $\delta \int ds = 0$ de l'espace-temps. Cette propriété de longueur stationnaire, $\delta \int ds = 0$, ne pouvant dépendre que de la structure de l'espace-temps, et étant nécessairement indépendante du système de coordonnées, nous avons cherché l'équation générale des géodésiques, c'est-à-dire des lignes d'Univers des mobiles libres dans l'espace-temps *euclidien*, en coordonnées arbitraires.

Le résultat établi pour un champ de gravitation « géométrique » dans un Univers *euclidien* a été étendu, *par application du principe d'équivalence*, à un champ de gravitation quelconque dans l'Univers réel.

Mais, jusqu'à présent, rien ne prouve que la loi de conservation impose au point matériel libre de suivre une géodésique d'Univers. Voici une démonstration (Jacques Rossignol). Pour simplifier les calculs, prenons les coordonnées telles que $\sqrt{-g} = 1$. La loi de conservation est

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} T^{\alpha\beta} = 0,$$

avec

$$T_\mu^\nu = g_{\mu\sigma} \rho_0 \frac{dx_\sigma}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}, \qquad T^{\alpha\beta} = \rho_0 \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}.$$

Portant ces expressions de T_μ^ν et $T^{\alpha\beta}$ dans l'équation, et posant $u^\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$, on obtient immédiatement (avec quelques changements d'indices muets)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(u^\sigma u^\nu) + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} u^\alpha u^\beta = 0$$

ou

$$(a) \qquad u^\sigma \frac{\partial u^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{du^\sigma}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} u^\alpha u^\beta = 0.$$

Multipliant par u_σ, nous obtenons

$$u_\sigma u^\sigma \frac{\partial u^\nu}{\partial x_\nu} + u_\sigma \frac{du^\sigma}{ds} + g_{\gamma\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} u^\alpha u^\beta u^\gamma = 0,$$

c'est-à-dire

$$u_\sigma u^\sigma \frac{\partial u^\nu}{\partial x_\nu} + u_\sigma \frac{du^\sigma}{ds} + \left[\begin{matrix} \alpha\beta \\ \gamma \end{matrix} \right] u^\alpha u^\beta u^\gamma = 0.$$

Les deux derniers termes du symbole se détruisent dans la sommation ; l'équation précédente s'écrit donc :

$$u_\sigma u^\sigma \frac{\partial u^\nu}{\partial x_\nu} + u_\sigma \frac{du^\sigma}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} u^\alpha u^\beta u^\gamma = 0,$$

ou encore

$$(b) \qquad u_\sigma u^\sigma \frac{\partial u^\nu}{\partial x_\nu} + u_\sigma \frac{du^\sigma}{ds} + \frac{1}{2} \frac{dg_{\alpha\beta}}{ds} u^\alpha u^\beta = 0.$$

Nous remarquons maintenant que

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1$$

et, par conséquent,

$$\frac{dg_{\alpha\beta}}{ds} u^\alpha u^\beta + 2 g_{\alpha\beta} u^\beta \frac{du^\alpha}{ds} =$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{ds}u^{\alpha}u^{\beta} = -u_{\alpha}\frac{du^{\alpha}}{ds} = -u_{\sigma}\frac{du^{\sigma}}{ds}.$$

Les deux derniers termes de (b) se détruisent donc, et il reste

$$\frac{\partial u^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0$$

si l'on supprime la restriction $\sqrt{-g} = 1$, cette équation se généralise par

$$\mathfrak{V}^{\nu}_{\nu} = 0 \qquad (\mathfrak{V}^{\mu} = u^{\mu}\sqrt{-g}).$$

Or, l'équation

$$\rho_0 \mathfrak{V}^{\nu}_{\nu} = 0$$

n'est autre que l'expression de la conservation de la masse.

Tenant compte de $\frac{\partial u^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0$, l'équation ($a$) est bien l'équation générale des géodésiques. La restriction $\sqrt{-g} = 1$ est levée, car le premier membre est un tenseur (*voir* n° 78).

Eddington [1] donne la démonstration suivante, et établit en même temps que la masse au repos d'une particule est constante.

La loi de conservation $T'_{\mu\nu} = 0$ peut s'écrire, en faisant passer en haut l'indice μ, sous la forme $T^{\mu\nu}_{\nu} = 0$, ou, d'après (58-13),

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}(T^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = -\left\{ \begin{matrix} \alpha\nu \\ \mu \end{matrix} \right\} T^{\alpha\nu}\sqrt{-g}.$$

Intégrons cette équation pour un quadrivolume très petit. On peut effectuer immédiatement une première intégration sur le premier membre, et l'on a

$$(72\text{-}14) \quad \iiint T^{\mu 1}\sqrt{-g}\,dx_2\,dx_3\,dx_4 + \iiint T^{\mu 2}\sqrt{-g}\,dx_1\,dx_3\,dx_4 + \ldots$$
$$= -\iiiint \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \mu \end{matrix} \right\} T^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\omega.$$

Supposons que dans le domaine d'intégration il n'y ait qu'une simple particule et que, par suite, le tenseur matériel soit nul en tout point sauf sur la ligne d'Univers de la particule.

---

[1] *Espace, Temps, Gravitation*, partie théorique, n° 41.

On a

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds},$$

et, d'après (22-13),

$$\sqrt{-g}\, d\omega = d\omega_0 = dX_1\, dX_2\, dX_3\, dX_4 = dV . c\, dt = dV\, ds,$$

dV étant l'élément de volume tridimensionnel pour l'observateur, au repos par rapport à la particule, qui mesurera l'élément de quadrivolume dans l'Univers tangent. Nous écrirons donc

$$\iiiint \rho_0 \sqrt{-g}\, d\omega = \iiiint \rho_0\, dV\, ds = m_0\, ds,$$

ds étant la longueur de l'arc de ligne d'Univers continu à l'intérieur du domaine d'intégration et $m_0 = \iiint \rho_0\, dV$ la masse au repos de la particule.

Donc, si le domaine d'intégration est très petit, nous pouvons remplacer le second membre de (72-14) par

$$(73\text{-}14) \qquad - \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \mu \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} m_0\, ds.$$

Au premier membre, les intégrales triples étendues, à l'espace ridimensionnel qui limite le quadrivolume, s'annulent partout sauf aux deux points où la ligne d'Univers coupe cet espace ridimensionnel.

Pour simplifier, choisissons les coordonnées de manière qu'au voisinage de ces points d'intersection le quadrivolume soit limité par $x_1 =$ const., de sorte que la première des intégrales triples subsiste seule. Le premier membre de (72-14) devient l'expression

$$(74\text{-}14) \qquad \left[\frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_1}{ds} \iiint \rho_0 \sqrt{-g}\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \right]$$

dont on doit prendre la différence des valeurs pour les deux valeurs limites.

Dans chaque élément d'intégration, nous pouvons remplacer

$$\sqrt{-g}\, \frac{dx_1}{ds}\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \quad \text{par} \quad \frac{dV\, ds}{ds} \text{ ou } dV,$$

e (74) s'écrit simplement

$$\left[m_0 \frac{dx_\mu}{ds}\right],$$

ndiquant qu'on doit prendre la différence des valeurs ntité aux deux limites. On peut écrire encore

$$\frac{d}{ds}\left(m_0 \frac{dx_\mu}{ds}\right) ds,$$

mme dans l'expression (73-14), la longueur de l'arc de vers compris entre les deux limites.
n (72) devient

$$\frac{d}{ds}\left(m_0 \frac{dx_\mu}{ds}\right) + m_0 \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \mu \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0,$$

i donne le taux de variation de la quantité de mouve-'énergie de la particule.
équation on déduit :

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{ds} \frac{d}{ds}\left(m_0 \frac{dx_\mu}{ds}\right) &= - m_0^2 g_{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \mu \end{matrix} \right\} \frac{dx_\nu}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} \\
&= - m_0^2 \left[\begin{matrix} \alpha\beta \\ \nu \end{matrix} \right] \frac{dx_\nu}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} \\
&= - \frac{1}{2} m_0^2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} \\
&= - \frac{1}{2} m_0^2 \frac{dg_{\alpha\beta}}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} \\
&= - \frac{1}{2} m_0^2 \frac{dg_{\mu\nu}}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.
\end{aligned}$$

membre à membre à cette équation la même équation permutant μ et ν, nous obtenons

$$g_{\mu\nu} m_0 \frac{dx_\nu}{ds} \frac{d}{ds}\left(m_0 \frac{dx_\mu}{ds}\right) + g_{\mu\nu} m_0 \frac{dx_\mu}{ds} \frac{d}{ds}\left(m_0 \frac{dx_\nu}{ds}\right) + m_0^2 \frac{dg_{\mu\nu}}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} m_0^2\right) = 0;$$

or, on a

$$g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=1,$$

d'où finalement

$$\frac{dm_0^2}{ds}=0,$$

ce qui prouve :

1° Que la masse au repos d'une particule est constante ;
2° Que les équations du mouvement (76-14) sont bien les équations d'une géodésique.

Ainsi, nous obtenons ce résultat fondamental que *la loi du mouvement est la conséquence de la conservation de l'impulsion-énergie. Elle est par suite contenue dans la loi de la gravitation* puisque celle-ci englobe le principe de conservation.

88. Champ statique. Loi de Newton déduite, en première approximation, de la loi d'Einstein.

Avec les mêmes approximations qu'au n° 86, nous pouvons, dans l'expression du tenseur $R_{\mu\nu}$

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{{\mu\nu \atop \alpha}\right\}+\left\{{\mu\alpha \atop \varepsilon}\right\}\left\{{\nu\varepsilon \atop \alpha}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{{\mu\alpha \atop \alpha}\right\}-\left\{{\mu\nu \atop \varepsilon}\right\}\left\{{\varepsilon\alpha \atop \alpha}\right\},$$

négliger le produit des forces, c'est-à-dire supprimer le second et le quatrième terme. La loi d'Einstein s'écrit donc approximativement :

$$(77\text{-}14)\qquad -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{{\mu\nu \atop \alpha}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{{\mu\alpha \atop \alpha}\right\}=-\varkappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right).$$

Développant le premier membre et remarquant que les $g^{\mu\nu}$ ont des valeurs extrêmement voisines des valeurs galiléennes (ce qui

nous obtenons :

$$(78\text{-}14)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu\\1\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu\\2\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\3\end{bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_4}\begin{bmatrix}\mu\nu\\4\end{bmatrix}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}$$
$$=-\varkappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right).$$

Supposons un champ rigoureusement statique, c'est-à-dire tel que les dérivées des $g_{\mu\nu}$ par rapport à x_4 soient nulles; le premier membre devient, pour $\mu=\nu=4$,

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right),\quad \text{c'est-à-dire}\quad -\frac{1}{2}\Delta g_{44}.$$

D'autre part, la matière étant au repos dans le système de référence (puisque le champ est supposé statique), si l'on néglige les forces internes, le tenseur $T_{\mu\nu}$ se réduit à

$$T_{44}=\rho=\rho_0=T.$$

De sorte que, pour $\mu=\nu=4$, l'équation (78-14) s'écrit

$$\Delta g_{44}=\varkappa\rho_0,$$

c'est-à-dire, d'après (71-14),

$$(79\text{-}14)\qquad \boxed{\Delta\Omega=\frac{1}{2}c^2\varkappa\rho_0=4\pi\rho_0 G}$$

en posant

$$\boxed{\varkappa=\frac{8\pi G}{c^2}}$$

La formule (79) est la formule de Poisson; c'est, comme on le sait, l'expression analytique de la loi de Newton : elle caractérise un champ de force proportionnel à la masse et en raison inverse du carré de la distance. On a, en effet, par intégration,

$$\Omega=-\iiint\frac{\rho_0 G}{r}\,dV.$$

De plus, la constante d'Einstein $\varkappa$ se trouve maintenant déter-

enne. Ce facteur de proportionnalité entre le tenseur T_μ^ν et le seur d'Univers conservatif $R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R$ a pour valeur

$$\text{(o-14)} \qquad \varkappa = \frac{8\pi G}{c^2} = \frac{8\pi\, 6,7.10^{-8}}{9.10^{20}} = 1,87.10^{-27} \text{ unité C. G. S.}$$

On doit remarquer que, même dans un champ *rigoureusement* atique, la loi de Newton n'est qu'approchée car les équations (77) (78) ne sont pas rigoureuses, mais elle est d'autant plus exacte ie les $g_{\mu\nu}$ diffèrent moins des valeurs galiléennes.

Nous voyons, par ce qui précède, qu'il y a identité entre la asse d'inertie et la masse gravitationnelle de la théorie de Newton, est-à-dire que la même qualité de la matière subit l'action d'un iamp de force et est elle-même la source d'un champ de gravita- on; mais, pour des champs intenses, la terminologie newtonienne evient ambiguë, puisque la loi de Newton n'est pas rigoureuse.

89. Champ non statique. Propagation de la gravitation.

Les potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$ sont des relations entre l'Uni- ers et le système de coordonnées employé. Comme l'a fait emarquer Eddington, il ne saurait être question d'une condition énérale de propagation, puisque le système de coordonnées est rbitraire; toutefois, si les coordonnées sont convenablement oisies, l'influence gravifique apparaît comme se propageant avec vitesse de la lumière (1). Voici la démonstration d'Eddington.

On sait que, dans la théorie de l'élasticité, l'équation générale xprimant la propagation d'une petite perturbation, avec la vitesse c, st

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\varphi = \Phi,$$

ù Φ est nul, sauf à la source de la perturbation.

(1) EINSTEIN, *Sitzungsber. d. Preusz. Akad. d. Wissensch.*, 1916, p. 688; 1918, . 154. — HILBERT, *Nachr. d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen*, 1917. — E SITTER, *Monthly Notices*, décembre 1916, p. 159. — EDDINGTON, *Report on the* [illegible]

Les sources de la gravitation se trouvent dans toutes les régions où il y a de la matière, et $R_{\mu\nu}$ est nul partout, sauf dans ces régions; il est donc logique de considérer $R_{\mu\nu}$ comme l'analogue de Φ. Nous allons chercher si une perturbation gravifique peut être représentée par des quantités $h_{\mu\nu}$ satisfaisant l'équation

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = 2R_{\mu\nu} \tag{81-14}$$

dont le premier membre est la forme généralisée du dalembertien

$$\Box h_{\mu\nu} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_4^2}\right)h_{\mu\nu},$$

où X_1, X_2, X_3, X_4 sont des coordonnées galiléennes.

Posons donc *a priori* (81-14); nous aurons à chercher la signification des $h_{\mu\nu}$. Nous prendrons un système de coordonnées tel que les $g_{\mu\nu}$ diffèrent très peu des valeurs galiléennes, les écarts à ces valeurs étant considérés comme du premier ordre; d'autre part, nous supposerons que les $h_{\mu\nu}$ sont du premier ordre. Nous négligerons toutes les quantités du second ordre.

Multiplions (81-14) successivement par $g^{\nu\sigma}$ et $g^{\mu\nu}$, nous obtenons (les dérivées des $g^{\mu\nu}$ étant très petites du premier ordre),

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_\mu^\sigma}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = 2R_\mu^\sigma$$

et

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = 2R$$

en écrivant

$$h_\mu^\sigma = g^{\nu\sigma}h_{\mu\nu} \qquad \text{et} \qquad h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}.$$

Des équations précédentes, nous tirons au degré d'approximation indiqué

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(h_\mu^\sigma - \frac{1}{2}g_\mu^\sigma h\right) = 2\left(R_\mu^\sigma - \frac{1}{2}g_\mu^\sigma R\right) = -2\varkappa T_\mu^\sigma$$

et

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{\partial h_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2}g_\mu^\sigma\frac{\partial h}{\partial x_\sigma}\right) = -2\varkappa\frac{\partial T_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma}.$$

Si le système de coordonnées est tel que $\dfrac{\partial T_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} = 0$, la solution,

eu égard aux conditions aux limites, est

$$\frac{\partial h_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g_\mu^\sigma \frac{\partial h}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x_\mu}.$$

Ceci posé, considérons l'expression

$$(82\text{-}14) \qquad -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial h_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial h_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)\right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right)$$

qui, au degré d'approximation, se réduit à

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_\nu^\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_\mu^\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_\mu \partial x_\nu},$$

d'après la condition qui précède, les deux premiers termes détruisent le dernier terme, et il ne subsiste que le terme

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

que nous avons posé égal à $R_{\mu\nu}$.

D'autre part, les coordonnées étant très voisines de coordonnées galiléennes, $R_{\mu\nu}$ se réduit à

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \alpha \end{matrix} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)\right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right); \end{aligned}$$

comparant cette expression à (82-14) qui, dans un système de coordonnées tel que $\frac{\partial T_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} = 0$, représente aussi $R_{\mu\nu}$, il est clair que les quantités très petites $h_{\mu\nu}$ peuvent être prises égales aux écarts des $g_{\mu\nu}$ à partir des valeurs constantes galiléennes. Dans un tel système de coordonnées, ces écarts satisfont l'équation (81-14).

Il importe maintenant d'examiner la condition $\frac{\partial T_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} = 0$ et de voir, d'abord, si cette condition est réalisable avec notre degré d'approximation, ensuite quelles sont les coordonnées employées et quelle est la signification *physique* du résultat.

Dans toute région vide, on a évidemment $\frac{\partial T_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} = 0$. Quelles que

des coordonnées galiléennes, l'équation de propagation généralisée

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=0$$

est satisfaite au degré d'approximation admis.

Dans une région contenant de la matière, les équations de l'hydrodynamique $\frac{\partial T_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma}=0$ qui expriment la conservation de l'impulsion-énergie de la matière seule ne seraient exactes qu'en l'absence de tout champ de force, mais nous savons par expérience qu'elles sont pratiquement valables si le champ de gravitation est très faible et avec les coordonnées quasi galiléennes habituellement employées en Mécanique. L'équation (81-14) est alors valable avec notre degré d'approximation.

Supposons un champ statique, c'est-à-dire dans lequel les dérivées $\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_4}$ sont nulles; l'équation (81-14) se réduit, toujours au même degré d'approximation, à

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)h_{\mu\nu}=2\,R_{\mu\nu}$$

ou

$$\Delta h_{\mu\nu}=-2\,R_{\mu\nu}=2\varkappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right).$$

On a, de plus, pour la matière au repos, $T=T_{44}=\rho_0$; les autres composantes $T_{\mu\nu}$ sont nulles; on obtient par conséquent,

$$\Delta h_{\mu\nu}=0 \qquad \text{si} \qquad \mu\neq\nu$$

et

$$\Delta h_{11}=\Delta h_{12}=\Delta h_{33}=\Delta h_{44}=\varkappa\rho_0,$$

c'est une généralisation de l'équation de Poisson, la solution est

$$h_{\mu\nu}=0 \qquad \text{si} \qquad \mu\neq\nu,$$

$$h_{11}=h_{22}=h_{33}=h_{44}=-\frac{\varkappa}{4\pi}\int\!\!\int\!\!\int\frac{\rho_0\,dV}{r}=-\frac{2\,G}{c^2}\int\!\!\int\!\!\int\frac{\rho_0\,dV}{r}.$$

L'intervalle élémentaire s'écrit donc, dans le cas d'une particule unique de masse M,

$$(83\text{-}14)\qquad ds^2=-\left(1+\frac{2\,GM}{\ldots}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+\left(1-\frac{2\,GM}{\ldots}\right)dx_4^2;$$

à l'infini, il devient

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2,$$

ce qui montre que les coordonnées employées deviennent galiléennes à l'infini.

L'interprétation physique des résultats qui précédent est donc la suivante. Si l'observateur considère que l'Univers est quasi euclidien, c'est-à-dire euclidien mais légèrement déformé par le voisinage de matière; s'il prend, comme dans la Mécanique céleste habituelle, des coordonnées qu'il considère comme galiléennes, c'est-à-dire des coordonnées aussi voisines que possibles des coordonnées galiléennes et *devenant galiléennes à l'infini;* s'il considère enfin des petites variations du champ de gravitation, produites par de la matière animée, dans le système de référence, de vitesses petites par rapport à la vitesse de la lumière, les déformations du champ de gravitation dans le vide obéissent très approximativement à l'équation

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} = 0$$

qui peut s'écrire

$$\Box h_{\mu\nu} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_{\mu\nu} = 0.$$

Au même degré d'approximation que l'équation de Poisson, c'est-à-dire que la loi de Newton, et même avec une approximation n peu plus grande représentée, dans le cas d'un champ statique, par l'équation (83-14) résultant de la généralisation de l'équation de Poisson [1], les perturbations gravifiques apparaissent à l'observateur comme se propageant avec la vitesse de la lumière.

---

[1] Avec l'approximation de la loi de Newton, il ne subsiste que h_{44}, de sorte que l'intervalle élémentaire s'écrit

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - \left(1 - \frac{2\,GM}{c^2 r}\right) c^2 \, dt^2,$$

l'espace envisagé seul ($dt = 0$) est considéré comme euclidien.

Nous établirons, au Chapitre suivant, que l'expression exacte de ds^2, dans le champ d'une particule, est, en coordonnées polaires,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\,GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2\,GM}{c^2 r}\right) c^2 \, dt^2;$$

Pratiquement, si nous considérons une distribution arbitraire de matière se mouvant, avec une vitesse faible par rapport à la vitesse de la lumière (ce qui est toujours le cas), on peut écrire, en désignant par Ω le potentiel au sens de la Mécanique ancienne,

$$-\square\,\Omega = \Delta\Omega - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Omega^2}{\partial t^2} = 4\pi\rho\,G;$$

cette équation a pour solution

$$\Omega_1 = -G\iiint \frac{\rho_{t'}\,dV_{t'}}{r_{t'}}.$$

Les effets de gravitation obéissent à la loi des potentiels retardés. Ω_t est, à l'instant t, le potentiel en un point qui, à l'époque

$$t' = t - \frac{r_{t'}}{c},$$

était situé à la distance $r_{t'}$ de l'élément matériel dont la densité était $\rho_{t'}$ et dont le volume était $dV_{t'}$.

Le temps t' dépend de l'élément de volume considéré. Le domaine d'intégration, c'est-à-dire le domaine dans lequel $\rho_{t'} \neq 0$ ne coïncide pas avec l'espace occupé à un instant déterminé par les corps sources du champ de gravitation.

Le fait que le potentiel de gravitation satisfait à l'équation des potentiels retardés explique, comme dans le cas des actions éléctriques, l'*apparence* des actions de gravitation centrales et instantanées.

90. Remarques sur la loi de la gravitation.

La loi de la gravitation *dans le vide*, $R_{\mu\nu} = 0$, constitue, comme nous l'avons déjà dit, une restriction considérable imposée aux géométries de l'Espace-Temps. Par contre, *dans la matière*, sup-

---

nous obtenons

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\,dt^2 \\ &= -\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\,dt^2, \end{aligned}$$

ce qui est précisément l'expression approchée (83-14).

posée continue, c'est-à-dire envisagée sous l'aspect macroscopique, tous les genres d'espace-temps deviennent théoriquement possibles : nous pouvons, en effet, nous donner arbitrairement les dix potentiels $g_{\mu\nu}$ et déterminer par les dix équations

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu}$$

les conditions que doit remplir la matière pour produire ces potentiels. Il importe toutefois d'observer que c'est là seulement un résultat théorique, car on peut se trouver ainsi conduit à une distribution physiquement impossible (densité excessive ou, au contraire, densité négative).

Dans le vide, les équations $R_{\mu\nu} = 0$ se réduisent à six conditions, à cause des quatre identités (13-14) :

$$R^{\nu}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_{\mu}} \equiv 0$$

qui correspondent à la quadruple indétermination des coordonnées.

Quand il y a de la matière présente, ces quatre identités se transforment en quatre équations :

$$R^{\nu}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_{\mu}} = -x T^{\nu}_{\mu\nu} = 0$$

entre les grandeurs qui forment le tenseur impulsion-énergie de la matière.

Le degré d'indétermination des coordonnées, c'est-à-dire le nombre des dimensions de l'Univers, impose donc à la matière un nombre égal de conditions qui doivent être nécessairement remplies. Ces quatre conditions constituent la loi de conservation de l'impulsion et de l'énergie.

Nous avons montré (n° 83) qu'en posant comme postulat la loi de conservation, il existe d'autres identifications théoriquement possibles du tenseur $T_{\mu\nu}$, c'est-à-dire d'autres lois de gravitation, mais beaucoup plus compliquées que la loi adoptée ; cette dernière, en excellent accord avec l'expérience, paraît bien être la loi *exacte*

$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}$ (courbure $R = 4\lambda$ constante et différente de zéro dans le vide), comme nous le verrons plus loin.

A la question « la loi d'Einstein est-elle bien conforme aux lois de la Mécanique » ? il faut répondre : « *C'est elle qui résume la dynamique tout entière* ». La loi de la gravitation contient, sous sa forme la plus générale, la loi de conservation de l'impulsion, de l'énergie et de la masse; elle contient la loi du mouvement du point matériel libre : c'est la loi de l'inertie, car gravitation et inertie ne sont qu'une seule et même chose; elle contient enfin la dynamique du point matériel.

III. — APPLICATIONS ET VÉRIFICATIONS DE LA LOI D'EINSTEIN.

91. Le champ de gravitation d'un centre matériel.

L'application la plus directe de la loi d'Einstein est l'expression de l'intervalle élémentaire dans l'Espace-Temps modifié par la présence d'un centre matériel ([1]).

Dans un Univers euclidien, c'est-à-dire en l'absence de tout champ de gravitation permanent, si l'on prend des coordonnées polaires

$$x_1 = r, \qquad x_2 = \theta, \qquad x_3 = \varphi, \qquad x_4 = ct,$$

l'intervalle élémentaire est représenté par

$$(84\text{-}14) \qquad ds^2 = -dr^2 - \underbrace{(r^2\,d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,d\varphi^2)}_{\text{Élément d'arc de sphère de rayon } r.} + c^2\,dt^2.$$

S'il y a une particule matérielle à l'origine des coordonnées, un champ de gravitation règne autour de cette particule, l'Espace-Temps n'est plus euclidien et l'expression précédente de ds^2 n'est

---

([1]) EINSTEIN, *Sitzungsber. d. Preusz. Akad. d. Wissensch.*, t. XLVII, 1915, p. 831. — SCHWARZSCHILD, *Ibid.*, t. VII, 1916, p. 189. — EDDINGTON, *Espace, Temps, Gravitation*, partie théorique, n° 29. L'exposé qui suit est celui d'Eddington.

plus exacte, mais nous pouvons tenter de mettre ds^2 s
forme analogue, qui se réduise à (84) à une distance infi
particule, puisqu'à l'infini le champ de gravitation do
raître.

Nous allons essayer une solution de la forme

$$(85\text{-}14)\quad \begin{cases} ds^2 = -e^{\lambda}\,dr^2 - e^{\mu}(r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2) + e^{\nu}\,dx_4^2 \\ (dx_4 = c\,dt), \end{cases}$$

r, θ, φ, x_4 sont quatre variables dont nous préciserons
la signification; λ, μ, ν *sont des fonctions de r et non d*
elles doivent s'annuler à l'infini; nous allons voir si nous
déterminer λ, μ, ν de manière que la loi d'Einstein $R_{\sigma\tau}$
satisfaite : si nous réussissons, nous aurons obtenu une
du problème et c'est seulement alors que nous pourrons
l'interprétation physique des coordonnées employées.

Nous n'écrivons pas de termes produits $dr\,d\theta$, $dr\,d\varphi$,
cause de la symétrie du champ dans l'espace; il n'y a pas
de termes en $dr\,dt$, $d\theta\,dt$, $d\varphi\,dt$ car suivant l'expressio
dington, il y a symétrie dans le temps de l'histoire p
future de la particule [1].

Nous pouvons simplifier l'expression (85) en prenant
velle coordonnée $r_1^2 = r^2 e^{\mu}$, supprimant l'indice et choisis
nouvelle fonction λ. Nous allons donc essayer l'expression

$$(86\text{-}14)\qquad ds^2 = -e^{\lambda}\,dr^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + e^{\nu}\,dx_4^2.$$

---

(1) Ces conditions sont imposées si l'on veut conserver les notions d
et de « temps ». L'objection faite par M. Painlevé (*C. R. de l'A*
24 oct. 1921) entre les conclusions physiques déduites de la formule d
child, que nous allons établir, n'est pas justifiée. M. Painlevé a emplo
coordonnées et a, naturellement, trouvé une autre expression exacte d
si le *mathématicien* considère, à son point de vue, tous les système
données comme également bons, il n'en est pas de même pour le *ph*
a besoin d'interpréter les résultats, et qui doit pour cela introduire le
mesurables avec ses instruments : le choix des coordonnées est alors
ment assujetti à certaines conditions. La formule de M. Painlevé ne p
interprétée physiquement, parce qu'elle contient un terme en *dr d*
tible avec la symétrie dans le « temps ». Ce point paraît avoir échappé

La réponse à ces objections est implicitement contenue dans l'Ouvr
(*Das Relativitätsprinzip*, B. II) et dans un Mémoi e de Mie (*Ann.*

Les potentiels de gravitation $g_{\sigma\tau}$ sont ainsi

$$(87\text{-}14)\qquad g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta, \quad g_{44} = e^{\nu}, \quad g_{\sigma\tau} = 0$$

orsque $\sigma \neq \tau$.

Le déterminant g se réduit à sa diagonale principale

$$(88\text{-}14)\qquad -g = e^{\lambda+\nu} r^4 \sin^2\theta,$$

t l'on a

$$(89\text{-}14)\qquad g^{\sigma\sigma} = \frac{1}{g_{\sigma\sigma}}.$$

es potentiels doivent satisfaire les équations

$$(90\text{-}14)\qquad \begin{aligned} R_{\sigma\tau} \equiv & -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\sigma\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} \\ & + \frac{\partial^2 \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma\, \partial x_\tau} - \begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Il faut calculer tous les symboles de Christoffel

$$(91\text{-}14)\qquad \begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\beta}\right);$$

nais, puisque les potentiels sont nuls sauf quand leurs deux ndices sont égaux, la sommation par rapport à β disparaît et 'on a

$$(92\text{-}14)\qquad \begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{Bmatrix} = \frac{1}{2 g_{\alpha\alpha}}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial g_{\alpha\tau}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha}\right) \qquad (\textit{sans sommation}).$$

Les cas possibles sont les suivants, σ, τ, ρ désignant des indices *différents* :

$$(93\text{-}14)\qquad \left\{\begin{aligned} & \begin{Bmatrix}\sigma\sigma\\ \sigma\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \operatorname{Log} g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\sigma}, && \begin{Bmatrix}\sigma\sigma\\ \tau\end{Bmatrix} = -\frac{1}{2 g_{\tau\tau}}\frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\tau}, \\ & \begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \tau\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \operatorname{Log} g_{\tau\tau}}{\partial x_\sigma}, && \begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \rho\end{Bmatrix} = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous obtenons ainsi, en désignant par λ' et ν' les dérivées par rapport à r des exposants λ et ν [équations (86) et (87)],

$$(94\text{-}14)\qquad \left\{\begin{aligned} & \begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\lambda', \quad \begin{Bmatrix}12\\ 2\end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, \quad \begin{Bmatrix}13\\ 3\end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, \quad \begin{Bmatrix}14\\ 4\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\nu', \\ & \begin{Bmatrix}22\\ 1\end{Bmatrix} = -r e^{-\lambda}, \quad \begin{Bmatrix}23\\ 3\end{Bmatrix} = \cot\theta, \quad \begin{Bmatrix}33\\ 1\end{Bmatrix} = -r \sin^2\theta\, e^{-\lambda}, \\ & \qquad \begin{Bmatrix}33\\ 2\end{Bmatrix} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \begin{Bmatrix}44\\ 1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda}\nu'. \end{aligned}\right.$$

Les 31 autres symboles sont nuls. Il ne faut d'ailleurs pas oublier que

$$\left\{ {21 \atop 2} \right\} \equiv \left\{ {12 \atop 2} \right\}$$

. . . .

Nous allons maintenant développer les équations $R_{\sigma\tau} = 0$ qui expriment la loi de gravitation. Ces équations se réduisent ici à quatre :

$$R_{11} = 0, \qquad R_{22} = 0, \qquad R_{33} = 0, \qquad R_{44} = 0,$$

les autres $R_{\mu\nu}$ étant identiquement nuls :

$$R_{11} \equiv -\frac{\partial}{\partial r}\left\{ {11 \atop 1} \right\} + \left\{ {11 \atop 1} \right\}\left\{ {11 \atop 1} \right\} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}\left\{ {12 \atop 2} \right\} + \left\{ {13 \atop 3} \right\}\left\{ {13 \atop 3} \right\} + \left\{ {14 \atop 4} \right\}\left\{ {14 \atop 4} \right\}$$
$$+ \frac{\partial^2 \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial r^2} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial r} = 0,$$

$$R_{22} \equiv -\frac{\partial}{\partial r}\left\{ {22 \atop 1} \right\} + 2\left\{ {22 \atop 1} \right\}\left\{ {12 \atop 2} \right\} + \left\{ {23 \atop 3} \right\}\left\{ {23 \atop 3} \right\}$$
$$+ \frac{\partial^2 \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial \theta^2} - \left\{ {22 \atop 1} \right\} \frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial r} = 0,$$

$$R_{33} \equiv -\frac{\partial}{\partial r}\left\{ {33 \atop 1} \right\} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{ {33 \atop 2} \right\} + 2\left\{ {33 \atop 1} \right\}\left\{ {13 \atop 3} \right\} + 2\left\{ {33 \atop 2} \right\}\left\{ {23 \atop 3} \right\}$$
$$- \left\{ {33 \atop 1} \right\} \frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial r} - \left\{ {33 \atop 2} \right\} \frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial \theta} = 0,$$

$$R_{44} \equiv -\frac{\partial}{\partial r}\left\{ {44 \atop 1} \right\} + 2\left\{ {44 \atop 1} \right\}\left\{ {14 \atop 4} \right\} - \left\{ {44 \atop 1} \right\} \frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{-g}}{\partial r} = 0.$$

En substituant la valeur de $-g$ (88) et les valeurs (94) des symboles puis réduisant, nous obtenons

$$(95\text{-}14)\quad \begin{cases} R_{11} \equiv \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} = 0, \\ R_{22} \equiv e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')\right] - 1 = 0, \\ R_{33} \equiv \sin^2\theta\, e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')\right] - \sin^2\theta = 0, \\ R_{44} \equiv e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\nu'}{r}\right) = 0. \end{cases}$$

De la première et de la dernière équation résulte $\lambda' = -\nu'$ et

(conditions aux limites)

$$\lambda = -\nu.$$

La seconde et la troisième équation sont identiques et en vertu de l'équation $\lambda = -\nu$ elles donnent

$$e^{\nu}(1 + r\nu') = 1.$$

Pour intégrer cette équation posons $e^{\nu} = \gamma$, nous avons

$$\gamma + r\gamma' = 1,$$

d'où

$$\gamma = e^{\nu} = 1 - \frac{A}{r}, \tag{96-14}$$

A étant la constante d'intégration. Cette constante est arbitraire dans le calcul, mais physiquement, pour une particule donnée, elle est évidemment déterminée et elle caractérise la particule au point de vue gravifique, puisque la particule produit un champ déterminé. Nous pouvons poser

$$A = \frac{2GM}{c^2},$$

d'où

$$\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \tag{97-14}$$

G étant la constante de la gravitation newtonienne; M est une nouvelle constante que nous identifierons plus loin avec la masse de la particule.

Remplaçons dans (86-14) e^{ν} et $e^{-\lambda}$ par $1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}$, nous obtenons l'expression définitive de ds^2

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2} \tag{98-14}$$

dont nous avions obtenu une expression approchée (83-14) au n° 89.

Cherchons maintenant la signification des coordonnées r, θ, φ, t.

1° *Le temps.* — En un point fixe par rapport au centre matériel ($dr = 0$, $d\theta = 0$, $d\varphi = 0$) l'intervalle du temps *mesuré* entre deux événements infiniment rapprochés est

Comme $\sqrt{\gamma} = 1$ lorsque r est infini, on voit que *la coordonnée t est le temps à une distance infinie de la particule* dans le système de référence lié à cette particule.

2° *L'espace.* — Dans l'expression de ds^2 le terme d'espace, représentant le carré de la distance de deux points infiniment voisins, est

$$dl^2 = \frac{1}{\gamma} dr^2 + r^2 \, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2. \tag{100-14}$$

Dans les champs les plus intenses que nous connaissons, γ reste toujours extrêmement voisin de 1, de sorte que l'espace est très peu différent d'un espace euclidien. Supposons d'abord que nous portions transversalement ($dr = 0$) une règle extrêmement courte dl, nous aurons

$$dl^2 = r^2 \, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2,$$

l'expression de dl^2 est la même que celle d'un arc de sphère en géométrie euclidienne, r étant le rayon vecteur, θ l'angle du rayon vecteur avec un axe fixe et φ l'angle azimuthal.

Supposons maintenant que la règle très courte soit portée radialement ($d\theta = 0$, $d\varphi = 0$) de manière que, partant d'un point éloigné de la particule, on s'en rapproche peu à peu. Nous avons

$$dr = \sqrt{\gamma} \, dl,$$

$\sqrt{\gamma}$ et par suite dr diminuent à mesure qu'on s'approche de la particule, et r tend vers une valeur limite r_1 que nous obtenons en faisant $\gamma = 0$, d'où $r_1 = \frac{2\,\mathrm{GM}}{c^2}$. C'est là d'ailleurs un cas purement théorique qui ne se présente que parce que nous avons supposé un *point* matériel sans dimensions, c'est-à-dire une concentration infinie de matière; la valeur de r_1 est excessivement petite et ne correspond à aucune réalité; la matière occupe toujours un volume trop grand pour qu'on puisse atteindre cette limite, qui, par conséquent, n'a pas de signification physique.

On voit que les longueurs mesurées transversalement (une circonférence, par exemple, ayant pour centre la particule) sont les mêmes que si l'espace était euclidien, mais qu'il en est autrement pour les longueurs mesurées radialement (le diamètre de la cir-

même règle. Il résulte de là que le rapport de la circonférence au diamètre est légèrement inférieur à π, mais l'écart est faible : si une masse de 1 tonne était à l'intérieur d'un cercle de 5^m de rayon, c'est seulement la 24e décimale qui serait changée (Eddington).

On pourrait exprimer l'élément de lignes ds avec d'autres coordonnées, mais celles que nous avons utilisées, d'après Schwarzchild, sont *celles qui se rapprochent le plus de coordonnées polaires euclidiennes*. Pratiquement, r et t sont la « distance » et « le temps ».

La quantité γ, nous l'avons dit, est extrêmement peu différente de l'unité, et c'est pourtant ce faible écart qui détermine tous les phénomènes de gravitation. γ intervient dans deux termes, le terme en dr et le terme en dt : il est évident que pour la mesure d'un intervalle d'Univers ds, c'est surtout par le terme en dt que l'influence de γ se manifeste, puisque ce terme contient le facteur c^2.

La loi de Newton. — Si nous appliquons la formule (68-14) nous retrouvons la loi de Newton, car nous obtenons l'expression

$$\Omega = -\frac{GM}{r}, \tag{101-14}$$

caractéristique d'un champ newtonien. En première approximation, dans un champ statique et pour les mobiles animés d'une faible vitesse dans le champ de la particule, *tout se passe comme si* la particule produisait une « force attractive » en raison inverse du carré de la distance et proportionnelle à la constante M qui la caractérise; on voit que cette constante d'intégration M s'identifie avec la masse gravifique de la théorie de Newton, que nous avons elle-même identifiée avec la masse d'inertie (n° 88).

92. Le mouvement d'un point matériel dans le champ de gravitation produit par un centre.

Un point matériel libre suit une géodésique, dont les équations sont (n° 78)

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} + \left\{ {\alpha\beta \atop \sigma} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0.$$

Dans le cas du champ de gravitation d'un centre, il est facile d'écrire ces équations : les valeurs des symboles de Christoffel ont été calculées précédemment (94-14). Faisons d'abord $\sigma = 2$, nous obtenons :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0. \tag{102-14}$$

Nous pouvons choisir les coordonnées de manière que la vitesse initiale du mobile soit dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$; comme nous avons initialement $\frac{d\theta}{ds} = 0$ et $\cos\theta = 0$, il en résulte que $\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$: *la trajectoire reste dans un plan.*

Pour $\sigma = 1, 3, 4$, θ étant égal à $\frac{\pi}{2}$, nous avons les équations

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2}\lambda' \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\, e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 = 0, \tag{103-14}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0, \tag{104-14}$$

$$\frac{d^2 x_4}{ds^2} + \nu' \frac{dr}{ds}\frac{dx_4}{ds} = 0 \qquad (x_4 = ct). \tag{105-14}$$

L'intégration des deux dernières équations donne

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h, \tag{106-14}$$

$$\frac{dx_4}{ds} = k\, e^{-\nu} = \frac{k}{\gamma}, \tag{107-14}$$

h et k étant deux constantes d'intégration.

Au lieu de chercher à intégrer (103), il est plus simple de déduire de l'expression (98-14) de ds^2, en y faisant $d\theta = 0$, $\sin\theta = 1$, l'équation suivante

$$\gamma^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \gamma \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 = -1 \tag{108-14}$$

qui joue le rôle d'une intégrale d'énergie.

Des trois équations précédentes (106, 107, 108) nous déduisons, par élimination de dx_4,

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + (\gamma - 1)\frac{h^2}{\ldots} - k^2 = -\gamma.$$

et par substitution de la valeur de γ, $\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$,

$$(109\text{-}14) \quad \begin{cases} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = (k^2 - 1) + \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{2GM}{c^2}\frac{h^2}{r^3}, \\ r^2\frac{d\varphi}{ds} = h. \end{cases}$$

On sait, d'autre part, que les équations du mouvement elliptique résultant de la loi newtonienne sont les suivantes :

$$(110\text{-}14) \quad \begin{cases} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{GM}{a} + \frac{2GM}{r}, \\ r^2\frac{d\varphi}{dt} = h_0, \end{cases}$$

a étant le demi grand axe de l'orbite.

Comparons ces équations newtoniennes à celles qu'on déduit de la théorie d'Einstein : la première des équations (109) contient un terme supplémentaire $\frac{2GM}{c^2}\frac{h^2}{r^3}$ que ne prévoyait pas l'ancienne théorie. Dans (109), $ds = c\,d\tau$, $d\tau$ étant le temps propre du mobile, très peu différent de dt ; r peut être confondu pratiquement avec la distance, au sens euclidien ; donc, à part le terme supplémentaire, on peut identifier les équations (109) et (110) en posant $k^2 = 1 - \frac{GM}{c^2 a}$ et l'on voit encore de cette manière que la quantité M qui avait été introduite comme constante d'intégration est la masse de la particule attirante.

A grande distance du centre, le terme supplémentaire est négligeable et l'on retrouve le mouvement prévu dans la théorie de Newton.

93. Première vérification de la loi d'Einstein. Le déplacement du périhélie de la planète Mercure.

Les calculs qui précèdent s'appliquent au mouvement des planètes ou de leurs satellites [1].

---

[1] Beaucoup d'auteurs simplifient les formules en prenant pour unités naturelles la vitesse de la lumière ($c = 1$) et la constante de la gravitation newtonienne ($G = 1$). Nous avons préféré conserver l'homogénéité habituelle des formules.

Des équations (109-14) on déduit immédiatement

$$\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = (k^2 - 1) + \frac{2\,GM}{c^2 r} + \frac{2\,GM h^2}{c^2 r^3}$$

ou, en posant $u = \frac{1}{r}$,

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{k^2 - 1}{h^2} + \frac{2\,GM}{c^2 h^2}u + \frac{2\,GM}{c^2}u^3;$$

par dérivation, il vient

$$\text{(111-14)} \qquad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{c^2 h^2} + \frac{3\,GM}{c^2}u^2.$$

Pour intégrer cette équation, nous allons procéder par approximations successives.

Le second terme du deuxième membre est très petit par rapport au premier terme; leur rapport est

$$3h^2 u^2 = 3\left(r\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \qquad \text{[d'après (109-14)]},$$

c'est trois fois le carré du rapport de la vitesse transversale de la planète à la vitesse de la lumière. Dans le système solaire $\left(r\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$ est de l'ordre de 10^{-8}; nous pouvons donc d'abord négliger le terme en u^2 dans (111) et nous obtenons l'ancienne solution de la mécanique céleste newtonienne

$$\text{(112-14)} \qquad u = \frac{GM}{c^2 h^2}[1 + e\cos(\varphi - \varpi)],$$

e étant l'excentricité de l'orbite, et ϖ la longitude du périhélie.

Une seconde approximation s'obtient en substituant la valeur (112) de u dans le terme $\frac{3\,GM}{c^2}u^2$ de (111), de sorte que cette équation (111) devient

$$\text{(113-14)} \qquad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{c^2 h^2} + \frac{3\,G^3 M^3}{c^6 h^4} + \frac{6\,G^3 M^3}{C^6 h^4}e\cos(\varphi - \varpi) + \frac{3\,G^3 M^3 e^2}{2c^6 h^4}[1 + \cos 2(\varphi - \varpi)].$$

un effet appréciable est le terme en $\cos(\varphi - \varpi)$ parce qu'il constitue une solution de l'équation sans second membre (effet de résonance). On sait qu'une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = A \cos\varphi$$

est

$$u_1 = \frac{1}{2} A \varphi \sin\varphi,$$

il en résulte pour u un terme

$$u_1 = \frac{3\,G^3 M^3}{c^6 h^4} e\varphi \sin(\varphi - \varpi)$$

qui vient s'ajouter au terme (112), de sorte que, finalement, on obtient une seconde approximation

$$u = \frac{GM}{c^2 h^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \varpi) + \frac{3\,G^2 M^2}{c^4 h^2} e\varphi \sin(\varphi - \varpi)\right]$$
$$= \frac{GM}{c^2 h^2}\,[1 + e\cos(\varphi - \varpi - \delta\varpi)],$$

en posant $\delta\varpi = \frac{3\,G^2 M^2}{c^4 h^2}\varphi$ et négligeant $(\delta\varpi)^2$.

La planète décrit une courbe non fermée, mais voisine d'une ellipse dont le périhélie avance proportionnellement à φ, c'est-à-dire tourne pendant une période d'une fraction de tour $\frac{\delta\varpi}{\varphi}$,

(114-14) $$\frac{\delta\varpi}{\varphi} = \frac{3\,G^2 M^2}{c^4 h^2};$$

h^2 se calcule aisément d'après (109) en remplaçant $k^2 - 1$ par sa valeur $-\frac{GM}{c^2 a}$, négligeant le terme en $\frac{h^2}{r^3}$, et remarquant que lorsque le rayon vecteur coïncide avec le grand axe on a $\frac{dr}{ds} = 0$. On trouve

$$h^2 = \frac{GM}{c^2} a(1 - e^2);$$

remplaçant dans (114), la rotation du périhélie, exprimée en fraction de tour par période, est

Le périhélie des planètes doit donc, du fait de l'écart à la loi de Newton, posséder un lent mouvement de rotation. Le calcul numérique, par application de la formule qui vient d'être établie, montre que pour les planètes autres que Mercure, l'écart entre les prévisions conformes à la loi de Newton et celles qui résultent de la loi d'Einstein, est de l'ordre des erreurs d'observation.

Par contre, pour Mercure, en donnant aux constantes les valeurs connues

$$\frac{\mathrm{GM}}{c^2} = 1{,}47.10^5 \quad (\mathrm{M}\ \text{masse du Soleil}), \qquad a = 5{,}85.10^{12}, \qquad e = 0{,}21,$$

et prenant 88 jours pour la durée de révolution, on obtient d'après la formule une rotation de $42'',9$ par siècle.

Depuis que Leverrier a établi la théorie de Mercure, en tenant compte des perturbations dues aux autres planètes, à Vénus en particulier, le désaccord entre les prévisions de la mécanique newtonienne et les observations est, aux erreurs d'observation près, précisément $43''$ par siècle. On n'avait pas réussi à expliquer cet écart.

La nouvelle mécanique céleste fondée sur l'emploi de la loi d'Einstein et sur la loi d'inertie $\delta \int ds = 0$ se développe actuellement, en particulier en ce qui concerne la théorie de la Lune.

94. Seconde vérification de la loi d'Einstein. La déviation des rayons lumineux.

La ligne d'Univers d'un rayon lumineux est une géodésique de longueur nulle. Faisant $ds = 0$ dans l'équation (98-14) nous obtenons pour le mouvement dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2\gamma. \tag{116-14}$$

1° *Propagation radiale.* — On a $d\varphi = 0$, donc

$$\frac{dr}{dt} = c\gamma = c\left(1 - \frac{2\mathrm{GM}}{c^2 r}\right).$$

La vitesse, dans le système de coordonnées choisi, *diminue* à mesure que l'onde se rapproche du centre qui produit le champ

de gravitation : il y a en réalité *répulsion* de la lumière par ce centre : il est donc, au fond, inexact de qualifier le centre matériel de « masse attirante ». La matière est un centre de déformation de l'Espace-Temps et l'effet produit sur un mobile nous apparaît, selon la grandeur et l'orientation de la vitesse, soit sous l'aspect d'une attraction, soit sous l'aspect d'une répulsion.

2° *Propagation transversale.* — On a

$$dr = 0, \qquad r\frac{d\varphi}{dt} = c\sqrt{\gamma}.$$

La vitesse de la lumière n'est donc pas la même que dans le cas d'une propagation radiale.

Il est essentiel de remarquer que ces vitesses radiale et transversale sont définies à l'aide des coordonnées que nous avons choisies. Il n'en reste pas moins vrai que, localement, un observateur en chute libre placé en un point quelconque du champ de gravitation, faisant avec des règles et des horloges la mesure de la vitesse de la lumière dans son voisinage immédiat, confondrait l'Univers réel avec l'Univers euclidien tangent et trouverait toujours dans toutes les directions une vitesse égale à la constante universelle c. Les résultats qui précèdent sont valables seulement pour celui qui observe l'ensemble du champ de gravitation en utilisant les coordonnées que nous avons employées et en mesurant les vitesses à l'aide de ces coordonnées. Si le centre matériel est le Soleil, ces coordonnées, qui deviennent à distance infinie des coordonnées polaires euclidiennes, seront celles qu'utilisera un observateur terrestre prenant le Soleil comme corps de référence (nos formules s'appliquent dans un champ statique et l'origine des coordonnées est le centre matériel), puisque cet observateur est dans une région où le champ de gravitation est faible comparativement au champ dans le voisinage du Soleil, et où l'Univers diffère excessivement peu d'un Espace-Temps euclidien.

La déviation d'un rayon lumineux dans le champ de gravitation se conçoit aisément. Soit un rayon passant dans le voisinage du Soleil, et considérons le front de l'onde : les parties les plus rapprochées du Soleil se propageant moins vite que les parties plus éloignées, le front d'onde pivote, et la direction de propagation est déviée. Eddington a comparé ce phénomène au pivotement du

ont des vagues de la mer, lorsque celles-ci arrivent obliquement
ır le rivage et que les parties les plus voisines de la rive sont
alenties.

Avant d'aborder la théorie, considérons de nouveau l'expres-
on de ds^2 (98-14). L'effet de gravitation sur un mobile est
éterminé par deux termes, celui en dr et celui en dt. C'est ce
ernier terme qui détermine la gravitation newtonienne (note du
° 89), et comme nous l'avons déjà fait remarquer, pour une masse
atérielle toujours animée d'une faible vitesse, c'est presque
niquement l'effet de ce terme qui se manifeste, parce que $c\,dt$ est
ès grand vis-à-vis de dr; en d'autres termes, le caractère non
ıclidien de l'espace considéré indépendamment du temps (100-14)
'a que peu d'influence ([1]). Mais, pour la lumière, les deux termes
nt même importance et nous devons nous attendre à un résultat
ès différent de celui qu'on obtiendrait en calculant le poids de la
ımière d'après la loi de Newton. Nous allons effectivement
ouver une déviation double de celle que donnerait la loi newto-
enne.

Soit c_α la vitesse de la lumière dans une direction faisant un
ıgle α avec le rayon vecteur; d'après (116-14) on a

$$c_\alpha^2\left(\frac{1}{\gamma}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=c^2\gamma. \tag{17-14}$$

Pour ne pas avoir une vitesse variable avec la direction, chan-
eons de coordonnée en posant

$$r=r_1+\frac{\mathrm{GM}}{c^2}, \tag{18-14}$$

qui revient, dans le cas du Soleil, à diminuer les distances r de
quantité insignifiante $\frac{\mathrm{GM}}{c^2}=1^{\mathrm{km}},47$. Nous obtenons, en négli-
eant le carré de $\frac{\mathrm{GM}}{c^2 r_1}$,

$$r^2=r_1^2\left(1+\frac{2\,\mathrm{GM}}{c^2 r_1}\right)=\text{sensiblement }\frac{r_1^2}{\gamma}.$$

([1]) Il produit cependant les $\frac{2}{3}$ du déplacement du périhélie de Mercure. Si l'on
pprimait le coefficient $\frac{1}{\gamma}$ de dr^2, ce qui reviendrait à adopter l'ancienne théorie

L'équation (116-14) peut alors s'écrire

$$\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \left(r_1 \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2\gamma^2,$$

et la vitesse, avec ces coordonnées est la même dans toutes les directions

$$(119\text{-}14) \qquad c_1 = c\gamma = c\left(1 - \frac{2\,GM}{c^2 r}\right) = \text{sensibl. } c\left(1 - \frac{2\,GM}{c^2 r_1}\right).$$

Mais cette vitesse dépend de la distance r_1. Le trajet du rayon lumineux est déterminé par la condition de temps minimum (condition de Fermat) : tout se passe comme si l'espace était euclidien et rempli d'une matière ayant un indice de réfraction

$$(120\text{-}14) \qquad n = \frac{c}{c_1} = 1 + \frac{2\,GM}{c^2 r_1}.$$

La trajectoire du rayon lumineux, dans un milieu réparti en couches concentriques, satisfait à la condition

$$(121\text{-}14) \qquad np = \text{const.},$$

p étant la distance du centre à la tangente.

D'autre part, d'après (120-14), nous avons approximativement

$$(122\text{-}14) \qquad n^2 = 1 + \frac{4\,GM}{c^2 r_1},$$

(121) et (122) sont l'intégrale des aires et l'intégrale de l'énergie dans le mouvement, suivant la loi de Newton, d'une particule de vitesse c, *attirée par une masse* 2 M.

L'orbite est une hyperbole dont le demi-axe est

$$(123\text{-}14) \qquad a = \frac{2\,GM}{c^2};$$

cette hyperbole est la trajectoire de la lumière.

Si la distance du sommet au foyer est R, nous avons

$$a(e - 1) = R,$$

et par suite, en tenant compte de (123-14),

$$e = 1 + \frac{c^2 R}{2\,GM} \quad \text{ou sensiblement} \quad \frac{c^2 R}{2\,GM}.$$

L'angle très petit des asymptotes est

$$\frac{2}{\sqrt{e^2-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{e} \quad \text{ou} \quad \frac{4GM}{c^2R}.$$

Pour un rayon *venant de très loin* $(-\infty)$ et *parvenu à grande distance du centre* $(+\infty)$ après être passé à la distance minimum R de ce centre, la déviation totale est donnée précisément par l'angle des asymptotes, elle est égale à

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2R}. \qquad (124\ 14)$$

Cette déviation est double de celle qu'on calculerait par la loi de Newton pour une particule de vitesse initiale c attirée par la masse M.

Pour un rayon passant tangentiellement au bord du Soleil, on a

$$\frac{GM}{c^2} = 1^{\text{km}},47,$$

$$R = \text{rayon du Soleil} = 697\,000 \text{ kilomètres};$$

par suite

$$\alpha = 1'',74.$$

La déviation de la lumière constitue l'*experimentum crucis* permettant de décider entre la loi d'Einstein et celle de Newton. Si une étoile, vue près des bords du Soleil, est déviée vers l'extérieur du Soleil, de 1'',74 à partir de sa position normale sur la sphère céleste, la théorie de Newton doit certainement être abandonnée, et le résultat est favorable à la théorie d'Einstein.

Les astronomes de Greenwich et d'Oxford ont vérifié l'exactitude du résultat d'Einstein, en profitant de l'éclipse totale de Soleil du 19 mai 1919.

La zone de totalité traversait l'Atlantique au voisinage de l'équateur, commençant au Brésil et finissant en Afrique. Les conditions étaient favorables, plusieurs étoiles brillantes devant être vues au voisinage du disque solaire pendant l'éclipse.

Une première expédition (Crommelin et Davidson) se rendit à Sobral, au Brésil, et prit une dizaine de photographies pendant les 5 minutes que dura la totalité de l'éclipse. Deux mois après, la même région du ciel fut visible la nuit et fut photographiée avec

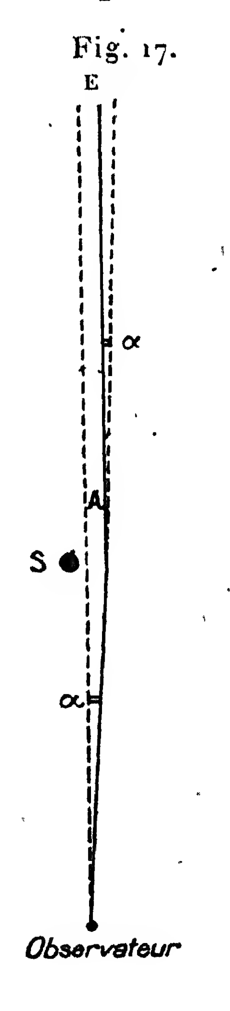
cement moyen fut ramené au bord du Soleil [déplacement proportionnel à R d'après la formule (124-14) et trouvé égal à 1",98].

L'autre expédition (Eddington et Cottingham), installée dans l'île du Prince (golfe de Guinée) a trouvé une moyenne de 1",60.

La moyenne des deux résultats 1",79 concorde remarquablement avec la valeur prévue par la loi d'Einstein. L'accord existe, non seulement en moyenne, mais dans les déplacements individuels des diverses étoiles : ces déplacements varient bien en raison inverse de la distance au centre du Soleil.

La déviation observée ne peut d'ailleurs pas être attribuée à une atmosphère ou à de la matière cosmique entourant le Soleil et s'étendant jusqu'aux distances pour lesquelles les mesures ont été faites. Le calcul indique, en effet, que le pouvoir absorbant et la densité d'une telle atmosphère seraient assez grands pour affaiblir notablement, par absorption et par diffusion de la lumière, l'éclat

Fig. 17.



des étoiles; d'autre part des comètes ont été suivies dans ces régions et n'ont manifesté aucun ralentissement

La figure ci-dessus fait comprendre que la déviation α d'un

rayon lumineux ne peut être appréciable que si la lumière vient d'une source E extrêmement éloignée de l'astre S qui produit le champ de gravitation. Si la source était en A, elle serait vue dans une direction pratiquement confondue avec sa direction réelle; tel serait le cas pour une étoile double A — S.

95. Un champ de gravitation ralentit le cours du temps.

Soient deux événements infiniment voisins se produisant au même point du champ de gravitation d'un centre matériel, c'est-à-dire tels que $dr = 0$, $d\theta = 0$, $d\varphi = 0$. La formule (15) se réduit à

$$ds = c\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}\, dt.$$

Nous avons vu (n° 91) que t est le « temps » à une distance très grande (théoriquement infinie) du centre gravifique; dt est donc l'intervalle de temps mesuré, entre les deux événements considérés, par un observateur lié au centre matériel, mais situé très loin de ce centre, pratiquement en dehors du champ de gravitation.

Mais d'autre part l'intervalle de *temps propre* entre ces deux événements, c'est-à-dire l'intervalle qui serait mesuré par une horloge placée au point du champ où ils se sont produits tous deux est

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}\, dt,$$

$d\tau$ est plus petit que dt.

Soient alors deux horloges identiques A et B placées à côté l'une de l'autre, en un point très éloigné du centre matériel, et marquant la même heure. Elles mesurent toutes deux le temps t. Transportons l'horloge A en un point où le champ est plus intense, à la distance r du centre; cette horloge va mesurer le temps $\int d\tau$, plus court que $\int dt$; elle va donc marcher plus lentement, et si on la ramène près de l'horloge B, on devra constater qu'elle a pris du

96. Troisième vérification de la loi d'Einstein. Le déplacement des raies du spectre solaire.

Le ralentissement du temps par l'effet de la gravitation est susceptible d'une vérification expérimentale si l'on admet, ce qui paraît bien probable, que l'intervalle de ligne d'Univers δs d'une source lumineuse, entre deux phases égales de l'émission, peut être considéré comme invariable ([1]); en d'autres termes qu'une source lumineuse est une horloge naturelle donnant une mesure invariante de l'intervalle δs.

Si cette hypothèse est exacte, une source lumineuse sur le Soleil permet la comparaison du temps solaire et du temps terrestre.

Soit δs l'intervalle, indépendant du champ de gravitation, entre deux phases égales de l'émission. Si la source est sur le Soleil, l'observateur terrestre qu'on peut considérer comme étant dans un champ de gravitation négligeable mesure entre deux émissions consécutives un temps

$$\delta t = \frac{\delta s}{c\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} = \frac{\delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}},$$

R étant le rayon du Soleil.

Pour l'observateur terrestre, la période de la source solaire est δt, alors que la période propre qu'il mesure en observant la même source sur la Terre est $\delta\tau$. δt étant plus grand que $\delta\tau$, les raies du spectre solaire doivent nous paraître légèrement déplacées vers le rouge.

La confirmation expérimentale a été donnée par A. Pérot ([2]). La vérification était difficile, car les raies spectrales sont modifiées

([1]) Ceci ne doit cependant pas être rigoureux. D'après la théorie de Weyl (Chap. XVII), les dimensions d'un atome dépendent des champs électromagnétiques que cet atome a antérieurement subis; il se peut donc qu'un atome de matière solaire et l'atome du même corps pris sur la Terre, amenés à côté l'un de l'autre, ne soient pas rigoureusement identiques; mais l'écart doit être beaucoup trop faible pour qu'il y ait lieu de l'envisager.

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 26 avril, 26 juillet 1920, 7 mars 1921.

par la pression et par l'effet Doppler dû, non seulement au mouvement relatif de la Terre et du Soleil (dont on tient compte aisément), mais au mouvement des vapeurs dans l'atmosphère solaire.

Par une méthode interférentielle (étalons de Pérot et Fabry), A. Pérot a d'abord étudié, au laboratoire, l'influence de la pression sur des raies (têtes de bandes du cyanogène) jusqu'alors considérées comme insensibles à la pression. Il a reconnu que ces raies ont une longueur d'onde légèrement plus grande lorsque la source est dans le vide. L'observation de la raie (tête de bande) 4197 angströms du cyanogène a été faite, par la même méthode interférentielle, dans le spectre d'absorption de l'atmosphère solaire; la région absorbante est, d'après ce qu'on sait actuellement de la constitution du Soleil, dans les régions hautes de cette atmosphère, régions où la pression est faible. La longueur d'onde solaire a été comparée à la longueur d'onde terrestre à basse pression. Après correction de l'effet du mouvement relatif de la Terre, la longueur d'onde solaire est plus grande que la longueur d'onde terrestre; leur différence est 0,009 unité angström. En faisant la correction du mouvement de chute des centres absorbants, on obtient 0,007.

Le nombre d'Einstein est compris entre le nombre brut et le nombre corrigé.

Dans un travail plus récent, Pérot a comparé la longueur d'onde de la raie b_1 du magnésium dans l'atmosphère solaire à la longueur d'onde de cette même raie au laboratoire. La raie b_1 et la raie b_2 ne subissant pas la même variation de longueur d'onde sous l'influence de la pression, le rapport de leurs longueurs d'onde permet de mesurer la pression : les mesures ont prouvé que sur le Soleil, dans la couche d'absorption des raies b_1, la pression est pratiquement nulle. On peut donc comparer la longueur d'onde de b_1 solaire à la longueur d'onde de b_1 terrestre à très basse pression; la différence obtenue après correction de l'effet Doppler est, dans les limites d'approximation des mesures, celle qui résulte de la formule d'Einstein.

Enfin Buisson et Fabry, qui ont mesuré les longueurs d'onde de nombreuses raies du fer, ont obtenu les résultats suivants :

moyen des raies solaires par rapport aux positions des raies de l'arc au fer *dans le vide*, est 0,0076; la théorie prévoit 0,0089.

Pour 10 raies entre 5100 et 5500 angströms, le déplacement observé est 0,0127; le chiffre théorique est 0,0111.

La concordance est parfaite, les différences entre les déplacements mesurés et les déplacements calculés étant du même ordre de grandeur que l'incertitude des mesures. Les écarts observés s'interprètent donc entièrement en admettant :

1° Que la pression dans la couche renversante est faible et par suite que l'effet de pression est négligeable, ainsi qu'il résulte des observations de Pérot pour les raies du magnésium;

2° Que l'effet Einstein est la seule cause des écarts observés, après avoir, bien entendu, tenu compte de l'effet Doppler.

La loi de la gravitation a donc reçu de remarquables confirmations dans deux domaines différents : mouvement d'un mobile (astre ou onde lumineuse); influence d'un champ de gravitation sur le cours du temps.

97. Retour sur l'expérience de Sagnac.

Pour répondre à une Note [1] quelque peu empreinte de scepticisme, P. Langevin [2] a récemment établi que la théorie de la relativité généralisée fournit l'interprétation la plus simple de l'expérience de Sagnac (n° 32).

Reprenons l'expression de ds^2 établie au n° 60 et négligeons le terme du second ordre en ωR ($c\omega$, vitesse de rotation; R, distance d'un point du disque au centre), c'est-à-dire négligeons le terme du second ordre en $\frac{v}{c}$, v étant la vitesse linéaire du point du disque,

$$ds^2 = -dl^2 + dx_4^2 - 2\omega\, dx_4(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1),$$
$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Pour un rayon lumineux, nous avons $ds^2 = 0$,

$$dx_4^2 - 2\omega\, dx_4(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1) - dl^2 = 0.$$

---

(1) E. Picard, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 24 octobre 1921.

(2) P. Langevin, *Ibid.*, 7 novembre 1921.

Au premier ordre, x_1, x_2, x_3 peuvent être considérées comme les coordonnées d'espace pour un observateur lié à la plate-forme tournante; $(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$ est le double de la surface $d\mathrm{S}$ du triangle ayant pour sommet l'origine des coordonnées et pour base la projection sur le plan des $x_1 x_2$ de l'élément du rayon de lumière vu par les observateurs liés à la plate-forme; $\frac{dx_4}{c} = dt$ est le temps mesuré par un observateur du système galiléen dans lequel le disque est en rotation.

Au degré d'approximation admis, l'équation précédente s'écrit

$$dt = \frac{dl}{c} + \frac{2\omega}{c}\,d\mathrm{S}.$$

Intégrant le long d'un contour fermé, nous obtenons

$$t_1 = \frac{l}{c} + \frac{2\omega\mathrm{S}}{c};$$

S est l'aire du contour projeté sur un plan normal à l'axe de rotation. Pour le rayon qui suit le même contour en sens inverse, l'aire est de signe contraire et nous obtenons

$$t_2 = \frac{l}{c} - \frac{2\omega\mathrm{S}}{c}.$$

D'où la différence

$$t_1 - t_2 = \frac{4\omega\mathrm{S}}{c} \qquad (\text{vitesse de rotation } c\omega),$$

ce qui est précisément le résultat de Sagnac.

L'expérience de Sagnac mesure l'influence sur la propagation de la lumière des potentiels g_{14} et g_{24}, qui seuls sont modifiés *au premier ordre* par la rotation. Langevin fait remarquer que les effets de la force centrifuge composée sont déterminés par les mêmes potentiels et sont du premier ordre, alors que les effets de force centrifuge statique, correspondant à g_{44}, sont du second ordre.

L'expérience de Sagnac, du premier ordre, expliquée qualitativement et quantitativement dans toutes les théories, ne témoigne d'ailleurs ni pour ni contre aucune d'entre elles.

CHAPITRE XV.

LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

98. Généralisation des équations de Maxwell-Lorentz.

Les équations fondamentales du champ électromagnétique peuvent être considérées comme établies dans un Univers euclidien (le champ de gravitation de la Terre étant faible), et elles ont été vérifiées expérimentalement par des mesures d'une extrême précision. Nous admettrons l'exactitude rigoureuse de ces lois dans un Espace-Temps euclidien; partant de leur expression connue en coordonnées galiléennes, nous nous proposons de les exprimer, toujours dans un Univers euclidien, en coordonnées arbitraires, c'est-à-dire nous cherchons à les généraliser en introduisant un champ de force ou champ de gravitation *géométrique*.

D'après le principe d'équivalence, le résultat que nous obtiendrons sera encore exact dans un champ de gravitation permanent, c'est-à-dire dans l'Univers réel non euclidien.

Dans la théorie ordinaire, on considère un *potentiel vecteur* G_1, G_2, G_3 (unités électromagnétiques), et un *potentiel scalaire* ψ (unités électrostatiques).

Soient X, Y, Z les composantes de la force électrique (unités électrostatiques) et L, M, N les composantes de l'induction magnétique au point d'espace x, y, z (coordonnées galiléennes). On a, comme on le sait,

$$(1\text{-}15)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial G_1}{\partial t}, & L &= \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \\ Y &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial G_2}{\partial t}, & M &= \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \\ Z &= -\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial G_3}{\partial t}, & N &= \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

En vue de la généralisation, posons

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z, \qquad x_4 = ct,$$

Les équations (1-15) s'écrivent, avec cette notation,

$$
(3\text{-}15)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4} - \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_1}, & L &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2},\\
Y &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_2}, & M &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3},\\
Z &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4} - \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_3}, & N &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Écrivons maintenant les équations de Maxwell-Lorentz. L'unité de charge étant choisie de manière que le facteur 4π disparaisse (système d'Heaviside-Lorentz), soient u, v, w les composantes de la densité de courant (unités électromagnétiques) et P la densité de charge (unités électrostatiques). Les équations bien connues sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; && \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} + u = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\operatorname{Div}(L, M, N) = 0, && \operatorname{Div}(X, Y, Z) = P,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire, avec notre notation [1],

$$
(4\text{-}15)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_4} + \frac{\partial Z}{\partial x_2} - \frac{\partial Y}{\partial x_3} &= 0,\\
\frac{\partial M}{\partial x_4} + \frac{\partial X}{\partial x_3} - \frac{\partial Z}{\partial x_1} &= 0,\\
\frac{\partial N}{\partial x_4} + \frac{\partial Y}{\partial x_1} - \frac{\partial X}{\partial x_2} &= 0,\\
\frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial M}{\partial x_2} + \frac{\partial N}{\partial x_3} &= 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(5\text{-}15)\quad \left\{
\begin{aligned}
-\frac{\partial X}{\partial x_4} + \frac{\partial N}{\partial x_2} - \frac{\partial M}{\partial x_3} &= u,\\
-\frac{\partial Y}{\partial x_4} + \frac{\partial L}{\partial x_3} - \frac{\partial N}{\partial x_1} &= v,\\
-\frac{\partial Z}{\partial x_4} + \frac{\partial M}{\partial x_1} - \frac{\partial L}{\partial x_2} &= w,\\
\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} + \frac{\partial Z}{\partial x_3} &= P.
\end{aligned}
\right.
$$

---

[1] Dans un champ statique la quatrième des équations (5-15) s'écrit

Soient maintenant, d'une façon générale, φ_μ les composantes d'un quadrivecteur covariant (arbitraire pour le moment); nous pouvons former sa dérivée covariante

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} \varphi_\rho \qquad \text{(coordonnées quelconques).}$$

$\varphi_{\mu\nu}$ étant un tenseur covariant, les expressions

$$(6\text{-}15) \qquad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu} = F_{\mu\nu}$$

sont les composantes d'un nouveau tenseur covariant du second ordre.

Ce tenseur $F_{\mu\nu}$ *est symétrique gauche*, car on a $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

D'après la formation de $F_{\mu\nu}$, on a les *identités*

$$(7\text{-}15) \qquad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} \equiv 0.$$

Donnons à μ, ν, σ les valeurs suivantes :

μ	2,	3,	4,	1
ν	3,	4,	1,	2
σ	4,	1,	2,	3,

nous obtenons les quatre identités

$$(8\text{-}15) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} \equiv 0, \\ &\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} \equiv 0, \\ &\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} \equiv 0, \\ &\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} \equiv 0. \end{aligned} \right.$$

Le tenseur $F_{\mu\nu}$, étant symétrique gauche, a quatre composantes nulles, et n'a que six composantes distinctes, au signe près. Posons

$$(9\text{-}15) \qquad \left\{ \begin{aligned} &F_{14} = -F_{41} = X, \qquad F_{23} = -F_{32} = L, \\ &F_{24} = -F_{42} = Y, \qquad F_{31} = -F_{13} = M, \\ &F_{34} = -F_{43} = Z, \qquad F_{12} = -F_{21} = N, \end{aligned} \right.$$
$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0.$$

Les premiers membres des identités (8-15) sont précisément les

plus, les composantes du champ électrique et les composantes de l'induction magnétique sont formées à partir du potentiel vecteur (changé de signe) et du potentiel scalaire (3-15) comme les composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$ sont formées à partir du quadrivecteur φ_μ, d'après (6-15).

Nous pouvons donc donner l'interprétation suivante du premier groupe (4-15) des équations de Maxwell : les composantes de l'induction électrique et les composantes du champ magnétique constituent un tenseur symétrique gauche $F_{\mu\nu}$ du second ordre, formé lui-même à partir d'un *quadrivecteur potentiel* φ_μ dont les composantes d'espace (changées de signe) sont les composantes du potentiel vecteur (en unités électromagnétiques) et dont la composante de temps est le potentiel scalaire (en unités électrostatiques) de la théorie ordinaire. Le potentiel est un quadrivecteur covariant.

En coordonnées galiléennes, le tenseur covariant du champ électromagnétique est le suivant, d'après (9-15) :

$$(10\text{-}15)\qquad \left\{\begin{array}{lcccc} F_{\mu\nu} = & 0 & N & -M & X \\ \longrightarrow \nu & -N & 0 & L & Y \\ \downarrow & M & -L & 0 & Z \\ \mu & -X & -Y & -Z & 0 \end{array}\right.$$

Comme vérification, si l'on passe d'un système galiléen S à un autre système galiléen S' et si l'on transforme les composantes du tableau (10-15) suivant la loi de transformation des composantes d'un tenseur covariant, on trouve précisément les forces électriques et magnétiques du système S' telles qu'on les obtient par les formules de transformation de la relativité restreinte. Le tableau (10-15) est donc bien un tenseur.

Le tenseur contrevariant associé

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

va nous permettre d'exprimer le second groupe d'équations de Maxwell. Ce tenseur est, *en coordonnées galiléennes*,

$$(11\text{-}15)\qquad \left\{\begin{array}{lcccc} F^{\mu\nu} = & 0 & N & -M & -X \\ \longrightarrow \nu & -N & 0 & L & -Y \\ & M & -L & 0 & Z \end{array}\right.$$

Le second groupe de Maxwell (5-15) s'écrit maintenant

$$(12\text{-}15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F^{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial F^{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial F^{14}}{\partial x_4}=u,\\ &\frac{\partial F^{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial F^{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial F^{24}}{\partial x_4}=v,\\ &\frac{\partial F^{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial F^{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial F^{34}}{\partial x_4}=w,\\ &\frac{\partial F^{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial F^{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial F^{43}}{\partial x_3}=P. \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres des quatre équations (12-15), qui se résument sous la forme abrégée

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$$

constituent les quatre composantes d'un quadrivecteur contrevariant, car $\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ est la forme dégénérée en coordonnées galiléennes de la divergence $F^{\mu\nu}_\nu$ qui est un quadrivecteur contrevariant. Par conséquent les seconds membres u, v, w, P des équations (12-15) sont les composantes d'un quadrivecteur contrevariant, le *quadrivecteur « courant »*, dont les composantes d'espace constituent le courant de convection (unités électromagnétiques) et dont la composante de temps est la densité de charge (unités électrostatiques). Nous pouvons donc poser

$$(13\text{-}15)\qquad u=J^1,\qquad v=J^2,\qquad w=J^3,\qquad P=J^4.$$

On peut d'ailleurs voir directement que les J^μ sont les composantes d'un quadrivecteur contrevariant; on a, en effet,

$$(14\text{-}15)\qquad \begin{aligned}(u,\,v,\,w,\,P)&=P\left(\frac{1}{c}\frac{dx}{dt},\,\frac{1}{c}\frac{dy}{dt},\,\frac{1}{c}\frac{dz}{dt},\,\frac{dt}{dt}\right)\\ &=P\left(\frac{dx_1}{dx_4},\,\frac{dx_2}{dx_4},\,\frac{dx_3}{dx_4},\,\frac{dx_4}{dx_4}\right)\\ &=P\frac{ds}{dx_4}\left(\frac{dx_1}{ds},\,\frac{dx_2}{ds},\,\frac{dx_3}{ds},\,\frac{dx_4}{ds}\right).\end{aligned}$$

$P\frac{ds}{dx_4}$ est la charge totale par unité de *volume propre*, car $\frac{ds}{dx_4}=\alpha$ est la contraction de volume. Or la charge du volume propre est

forment comme les dx_μ et constituent par suite un quadrivecteur contrevariant [1].

En résumé les équations de Maxwell s'écrivent :

Premier groupe (4-15), (6-15), (8-15).

$$(15\text{-}15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\dfrac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\dfrac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}=0, \\ \text{ou} \\ F_{\mu\nu}=\dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}. \end{array}\right.$$

Deuxième groupe (5-15), (12-15).

$$(16\text{-}15)\qquad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=J^\mu.$$

Jusqu'à présent, nous avons des coordonnées galiléennes. *Il s'agit de trouver les relations générales valables dans un système de coordonnées arbitraires* et se réduisant aux précédentes pour un système galiléen. La généralisation est immédiate; l'équation (15-15) est covariante : elle subsiste dans tous les systèmes; quant à l'équation (16-15), c'est la forme dégénérée de $F^{\mu\nu}_\nu = J^\mu$; il suffit, pour avoir la relation tensorielle générale, de remplacer $\dfrac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ par la divergence $F^{\mu\nu}_\nu$.

Les équations générales de l'électromagnétisme sont donc les suivantes :

$$(17\text{-}15)\qquad \boxed{\begin{array}{l} F_{\mu\nu}=\dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} \\ F^{\mu\nu}_\nu = J^\mu \end{array}}$$

φ_μ étant le quadrivecteur potentiel et J^μ le quadrivecteur densité de courant-densité de charge.

Telle est la généralisation des équations de Maxwell-Lorentz.

Ces équations sont valables dans un champ de gravitation permanent (Univers non euclidien) parce que les conditions d'application du principe d'équivalence (n° 77) sont remplies.

---

[1] Inversement, J^μ étant un quadrivecteur contrevariant d'après ce qui pré-

La divergence $F_{\nu}^{\mu\nu}$ se simplifie à cause du caractère symétrique ıche de $F^{\mu\nu}$; on a, d'après (60-13), en introduisant les densités ısorielles,

$$\text{-15)} \qquad \mathfrak{F}_{\nu}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mathfrak{J}^{\mu}.$$

99. La loi de conservation de l'électricité.

De l'équation précédente nous tirons

$$\text{-15)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{J}^{\mu}}{\partial x_{\mu}} = \frac{\partial'' \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}\, \partial x_{\nu}} = 0,$$

r $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ étant symétrique gauche, $\frac{\partial^2 \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}\, \partial x_{\nu}} = 0$. D'après (55-13), il sulte de là

$$\text{-15)} \qquad J_{\mu}^{\mu} = 0.$$

ı coordonnées galiléennes x, y, z, t, cette équation s'écrit

$$\text{-15)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial P}{\partial t} = 0.$$

mblable à l'équation de continuité de l'hydrodynamique (60-14), e est l'expression de la loi de conservation de l'électricité.

100. La force électrodynamique.

Supposons un espace-temps euclidien et adoptons des coor-nnées galiléennes. Dans le champ électromagnétique X, Y, Z; M, N, les composantes K_1, K_2, K_3 de la force *mécanique* qui xerce sur l'unité de volume contenant charges et courants sont nnées par les formules de la théorie habituelle (formules qui nt rigoureuses ainsi que nous l'avons montré en relativité res-einte) :

$$\text{2-15)} \qquad \begin{cases} K_1 = XP + Nv - Mw, \\ K_2 = YP + Lw - Nu, \\ K_3 = ZP + Mu - Lv. \end{cases}$$

de temps est

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = X\,cu + Y\,cv + Z\,cw.$$

Désignons par K_4 ce travail changé de signe et divisé par c

$$K_4 = -\frac{d\mathfrak{T}}{dx_4} = -Xu - Yv - Zw. \tag{23-15}$$

D'après la définition du tenseur $F_{\mu\nu}$ (10-15) et celle du quadrivecteur J^{μ} (13-15), les équations (22-15) et (23-15) se résument ainsi :

$$K_{\mu} = F_{\mu\nu}J^{\nu} = F_{\mu\nu}F^{\nu\sigma}_{\sigma}, \tag{24-15}$$

ce qui prouve que les K_{μ} forment un quadrivecteur covariant ; les composantes d'espace de ce quadrivecteur sont les composantes de la force mécanique s'exerçant sur l'unité de volume, ou, ce qui revient au même, les composantes du gain de quantité de mouvement pour l'unité de volume de la matière; la composante de temps (coordonnée $x_4 = ct$) est la perte d'énergie (divisée par c). En coordonnées galiléennes, on doit donc écrire

$$-c^2\frac{\partial T^{\alpha}_{\mu}}{\partial x_{\alpha}} = K_{\mu}, \tag{25-15}$$

T^{α}_{μ} étant le tenseur matériel (45-14) dont les composantes ont les dimensions physiques d'une densité matérielle.

La généralisation en coordonnées quelconques, et pour un espace-temps de structure quelconque, est nécessairement

$$-c^2 T^{\alpha}_{\mu.\alpha} = K_{\mu} = F_{\mu\nu}J^{\nu} = F_{\mu\nu}F^{\nu\sigma}_{\sigma}. \tag{26-15}$$

Si la loi de conservation de l'impulsion-énergie s'étend aux phénomènes électromagnétiques, il doit exister un tenseur d'énergie électromagnétique E^{α}_{μ} dont la variation compense la variation du tenseur matériel, c'est-à-dire qu'on ait

$$E^{\alpha}_{\mu.\alpha} + T^{\alpha}_{\mu.\alpha} = 0, \tag{27-15}$$

ou

101. Le tenseur d'énergie électromagnétique.

Il existe effectivement un tel tenseur; il est donné par les expressions

$$(29\text{-}15) \qquad E_\mu^\sigma = \frac{1}{c^2}\left(-F_{\mu\alpha}F^{\sigma\alpha} + \frac{1}{4}g_\mu^\sigma F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right).$$

Nous allons vérifier que l'équation (28-15) est bien satisfaite. Prenons la divergence des deux membres, en observant que g_μ^σ est une constante (0 ou 1),

$$c^2 E_{\mu\sigma}^\sigma = -F_{\mu\alpha}F_\sigma^{\sigma\alpha} - F^{\sigma\alpha}F_{\mu\alpha\sigma} + \frac{1}{4}(F_\mu^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta\mu}).$$

Les deux derniers termes sont égaux, de sorte que nous pouvons écrire

$$c^2 E_{\mu\sigma}^\sigma = F_{\mu\alpha}F_\sigma^{\alpha\sigma} - F^{\sigma\alpha}F_{\mu\alpha\sigma} + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta\mu};$$

or $F^{\alpha\sigma}F_{\mu\alpha\sigma}$ peut s'écrire $F^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha\beta}$ ou aussi $F^{\alpha\beta}F_{\beta\mu\alpha}$; on a donc

$$c^2 E_{\mu\sigma}^\sigma = F_{\mu\alpha}F_\sigma^{\alpha\sigma} + \frac{1}{2}(F^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha\beta} + F^{\alpha\beta}F_{\beta\mu\alpha} + F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta\mu}).$$

L'expression entre parenthèses est nulle, car d'après la loi de formation des dérivées covariantes à trois indices (38-13) on constate que les termes contenant les symboles de Christoffel se détruisent mutuellement; l'expression se réduit alors à

$$\frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial F_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu},$$

expression qui est nulle d'après (15-15).

Finalement

$$c^2 E_{\mu\sigma}^\sigma = F_{\mu\alpha}F_\sigma^{\alpha\sigma},$$

ce qui est bien l'équation (28-15).

En coordonnées galiléennes, le tenseur d'énergie électromagnétique E_μ^σ groupe toutes les grandeurs qui interviennent dans la théorie ancienne :

$$1^\circ \qquad c^2 E_4^4 = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2)$$

est la densité d'énergie du champ électromagnétique, expression bien connue [1].

2° Les composantes $E_4^\sigma = - E_\sigma^4$ multipliées par c^2,

$$YN - ZM, \quad ZL - XN, \quad XM - YL,$$

sont les composantes du vecteur de Poynting (quantité de mouvement électromagnétique).

3° Le tenseur réduit aux neuf composantes d'espace (suppression de la dernière ligne et de la dernière colonne) est le tenseur de Maxwell (tensions électromagnétiques).

Contractons E_μ^σ en faisant $\sigma = \mu$, nous obtenons un scalaire nul

$$E = \frac{1}{c^2}\left(- F_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha} + \frac{1}{4} g_\mu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right) \equiv 0. \tag{30-15}$$

102. Loi générale de la gravitation en présence de matière et d'énergie électromagnétique.

L'expression la plus générale de la loi de conservation est (27-15)

$$E_{\mu.\alpha}^\alpha + T_{\mu.\alpha}^\alpha = 0.$$

Lorsque $\sqrt{-g} = 1$, elle s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(\underset{\text{Matière.}}{T_\mu^\alpha} + \underset{\text{Champ électromagnétique.}}{E_\mu^\alpha} + \underset{\text{Champ de gravitation.}}{t_\mu^\alpha} \Big) = 0.$$

En l'absence de matière, on a $E_{\mu\alpha}^\alpha = 0$, c'est-à-dire qu'en un point d'Univers où il n'y a que de l'énergie libre, on obtient, $E_{\mu\nu}$ étant symétrique,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\mu^\alpha}{\partial x_\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \mathcal{E}_\beta^\alpha = - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \mathcal{E}_{\alpha\beta}, \tag{31-15}$$

et si $\sqrt{-g} = 1$

$$\frac{\partial E_\mu^\alpha}{\partial x_\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} E_\beta^\alpha = - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} E_{\alpha\beta}, \tag{32-15}$$

---

[1] Ne pas oublier que nous avons choisi les unités de façon à faire disparaître

semblables aux équations (63-14) et (64-14) qui étaient relatives à la matière seule, ces équations expriment l'influence énergétique du champ de gravitation sur l'énergie électromagnétique.

Si, au point d'Univers considéré, il y a présence de matière et d'énergie électromagnétique, le fait que la divergence de $(T_\mu^\nu + E_\mu^\nu)$ doit être nulle pour que la loi de conservation soit satisfaite conduit (comme à la page 201) à écrire que cette somme de tenseurs doit être, à un facteur constant près, égale au tenseur conservatif $R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R$, et l'on obtient la loi générale de la gravitation

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R = -\varkappa (T_\mu^\nu + E_\mu^\nu). \tag{33-15}$$

Le tenseur d'énergie électromagnétique s'ajoute simplement au tenseur matériel.

Mais l'energie électromagnétique présente une profonde différence avec la matière; elle ne contribue pas à modifier la courbure totale R, car l'invariant contracté E étant nul (30-15), la courbure R est toujours égale à $\varkappa \rho_0$ (50-14); cette courbure *totale* est déterminée par la matière, et non par l'énergie libre. C'est là un résultat fondamental qui montre que la matière ne peut pas être formée uniquement à partir du tenseur E_μ^ν, ce tenseur ne contribuant pas à la constitution de la densité matérielle.

CHAPITRE XVI.

LE PRINCIPE D'ACTION STATIONNAIRE.

Dans le Chapitre XIV, nous avons été conduits de deux façons différentes à la loi générale de la gravitation. Nous avons d'abord exposé les raisonnements qui ont conduit Einstein à la découverte de cette loi : le résultat est l'égalité entre un tenseur de courbure conservatif et le tenseur impulsion-énergie, ce qui a pour conséquence évidente la conservation de l'impulsion-énergie. Nous avons montré ensuite que si l'on part du principe de conservation de l'impulsion-énergie, considéré *a priori* comme exact, on est conduit d'une façon intuitive et simple à écrire la loi d'Einstein.

On peut se placer à un point de vue plus général et déduire la loi de conservation ainsi que la loi de la gravitation du principe d'Hamilton (principe d'action stationnaire) généralisé.

Dans une région contenant de la matière, le produit de la densité par le volume est la masse, et la masse multipliée par c^2 est l'énergie; mais l'énergie ne fait intervenir que le volume tridimensionnel d'espace; on voit qu'une grandeur plus importante encore que l'énergie est celle qui fait intervenir le quadrivolume d'Univers : c'est l'*action*, produit d'une énergie par un temps. L'action est la grandeur fondamentale.

Lorentz (1) et Hilbert (2), puis Einstein (3), ont réussi à présenter les équations générales de la théorie de la gravitation comme des conséquences d'un unique principe d'action stationnaire. Nous donnerons un résumé de la méthode employée par Lorentz, puis nous exposerons le travail d'Einstein.

---

(1) H.-A. LORENTZ, *Versl. d. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam*, t. XXIII, p. 1073; t. XXIV, p. 1389 et 1759; t. XXV, p. 468.

(2) HILBERT, *Göt. Nachr.*, 1915 et 1917.

103. Méthode de Lorentz et d'Hilbert.

L'action considérée par Lorentz a une expression de la forme

$$(1\text{–}16)\quad \int\int\int\int_{\chi}(\mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2+\mathrm{H}_3+\mathrm{H}_4)\sqrt{-g}\,d\omega \qquad (d\omega = dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4)$$

$\sqrt{-g}\,d\omega$ est un invariant (n° 68).

H_1 est une fonction invariante se rapportant à la matière, dépendant explicitement des x_μ, des $g^{\mu\nu}$ et des dérivées des $g^{\mu\nu}$.

H_2 est l'action de substance et H_3 l'action de champ de l'électricité. Ces fonctions invariantes dépendent des $g^{\mu\nu}$ et de leurs dérivées, des φ_μ (composantes du quadrivecteur potentiel électromagnétique) et de leurs dérivées.

Enfin, de même qu'il y a une action de champ de l'électricité, il existe une action de champ de la matière, représentée par le terme de gravitation H_3; cet invariant dépend des $g^{\mu\nu}$ et de leurs dérivées

$$g^{\mu\nu}_{\alpha} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}; \qquad g^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta};$$

il dépend *linéairement* des $g^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$, les coefficients n'étant fonctions que des $g^{\mu\nu}$.

L'intégration est étendue à un domaine d'Univers quelconque χ et l'on suppose que les fonctions ont des variations nulles aux limites de ce domaine.

1° Pour l'action matérielle $\int\int\int\int_{\chi}\mathrm{H}_1\sqrt{-g}\,d\omega$, Lorentz a pris

$$(2\text{–}16)\quad c\int\int\int\int_{\chi}\rho_0\sqrt{-g}\,d\omega = c\int\int_{\chi}dm\,ds$$
$$= c\int_{\chi}dm\int_{\chi}\sqrt{g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu}.$$

En particulier, si le domaine envisagé ne contient qu'une particule de masse au repos m_0, l'action matérielle se réduit à

$$m_0 c\int ds = m_0 c^2\int d\tau;$$

on a donc bien une « action » au sens mécanique du mot, c'est-à-dire le produit d'une énergie $m_0 c^2$ par un temps $\left(\text{temps propre} \int d\tau\right)$.

2° L'action de substance de l'électricité est représentée par le terme

$$H_2 = \frac{1}{c}\varphi_\alpha J^\alpha \tag{3-16}$$

qui, en coordonnées galiléennes, est égal à

$$\frac{1}{c}(-G_1 u - G_2 v - G_3 w + \psi P)$$

(G_1, G_2, G_3, composantes du potentiel vecteur; u, v, w, composantes de la densité de courant de la théorie habituelle; ψ, potentiel scalaire; P, densité de charge).

3° Le terme d'action du champ électromagnétique est l'invariant

$$\frac{1}{c}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \tag{4-16}$$

égal, en coordonnées galiléennes, à

$$\frac{1}{c}\left[\frac{1}{2}(L^2+M^2+N^2) - \frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2)\right].$$

Nous devons remarquer que, dans un espace ne contenant que du rayonnement, l'action substantielle est nulle : $H_2 = 0$, car $J^\alpha = 0$, et $H_1 = 0$ puisque la masse *au repos* de l'énergie rayonnante est inexistante. C'est en ce fait que réside la plus grosse différence entre matière et rayonnement, c'est-à-dire entre énergie liée et énergie libre.

4° Enfin le terme de gravitation H_4 est un invariant par rapport aux transformations de coordonnées admettant pour invariant fondamental la forme quadratique $ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu$. Posons $\mathcal{H}_4 = H_4\sqrt{-g}$ et intégrons par parties l'expression $\int\int\int\int_\chi \mathcal{H}_4\,d\omega$, les $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\alpha$, $g^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ étant variés; H_4 dépendant linéairement des $g^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$

nous obtenons une expression de la forme

$$\iiint\int_{\chi} \mathcal{H}_4\, d\omega = \iiint\int_{\chi} \mathcal{H}'_4\, d\omega + \mathrm{F},$$

F étant une intégrale qui doit être étendue, non plus au domaine quadridimensionnel, mais aux limites de ce domaine; sa variation est nulle, puisque les $\delta g^{\mu\nu}$, $\delta g^{\mu\nu}_{\alpha}$, $\delta g^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ s'annulent aux limites du domaine; on a donc

$$\delta \iiint\int_{\chi} \mathcal{H}_4\, d\omega = \delta \iiint\int_{\chi} \mathcal{H}'_4\, d\omega, \tag{5-16}$$

$\mathcal{H}'_4$ dépendant des $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\alpha}$, mais ne dépendant plus des $g^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$. $\frac{\mathcal{H}'_4}{\sqrt{-g}}$ est donc un invariant ne contenant plus que les $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\alpha}$: c'est nécessairement, à un facteur constant près, l'invariant courbure totale $\mathrm{R} = g^{\mu\nu}\mathrm{R}_{\mu\nu}$, puisque R est le seul invariant ne faisant intervenir que les $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\alpha}$ pour le groupe de transformations admettant ds^2 pour invariant fondamental. Posons donc

$$\mathcal{H}'_4 = \frac{c}{\varkappa}\mathrm{R}\sqrt{-g}.$$

Nous obtenons

$$\delta \iiint\int_{\chi} \mathrm{H}_4 \sqrt{-g}\, d\omega = \delta \iiint\int_{\chi} \frac{c}{\varkappa}\mathrm{R}\sqrt{-g}\, d\omega. \tag{6-16}$$

Admettons maintenant *a priori* le principe d'action stationnaire

$$\delta \iiint\int_{\chi} \mathrm{H}\sqrt{-g}\, d\omega = 0 \qquad (\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 + \mathrm{H}_3 + \mathrm{H}_4). \tag{7-16}$$

Explicitant l'équation et remarquant que les variations portent sur les x_{μ}, $g^{\mu\nu}$, φ_{μ} ainsi que sur les dérivées des $g^{\mu\nu}$ et φ_{μ}, Lorentz a obtenu les résultats suivants :

1° Si l'on annule les coefficients des δx_{μ}, on obtient les équations des géodésiques d'Univers.

2° Si l'on annule les coefficients des $\delta g^{\mu\nu}$, on obtient les dix équations

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathrm{R} = -\varkappa(\mathrm{T}_{\mu\nu} + \mathrm{E}_{\mu\nu})$$

qui expriment la loi de la gravitation.

3° Les termes en $\delta\varphi_\mu$ donnent quatre équations; ce sont les équations de Maxwell généralisées.

Sur les 14 équations de la gravitation et de l'électromagnétisme, conformément à un théorème général établi par Hilbert, 10 équations seulement sont indépendantes, le quadruple degré d'arbitraire qui subsiste correspondant à l'indétermination du système de coordonnées.

L'équation

$$\delta\int\int\int\int_\chi \mathrm{H}\sqrt{-g}\,d\omega = 0$$

se présente ainsi comme l'expression la plus générale des lois de la mécanique et de l'électromagnétisme.

La méthode de Lorentz et d'Hilbert suppose que le champ de gravitation et la matière sont des entités différentes, puisque l'action totale est supposée contenir une action matérielle et une action de gravitation distinctes. C'est grâce à l'hypothèse d'actions distinctes les unes des autres que le principe d'action stationnaire fournit les équations de la gravitation et de l'électromagnétisme.

Toute autre est la conception d'Eddington. Les composantes du tenseur $R_\mu^\nu - \frac{1}{2}g_\mu^\nu R$ sont des grandeurs *géométriques*, celles du tenseur total d'énergie sont des grandeurs *physiques* qui se révèlent à nos sens et qui sont l'objet de nos mesures expérimentales. Nous avons déjà dit que la loi d'Einstein est considérée par Eddington comme exprimant que les deux tenseurs représentent les mêmes choses sous des aspects différents : cette loi apparaît comme une identification entre grandeurs géométriques et grandeurs physiques. Prenant les scalaires des deux membres de la formule qui exprime la loi de la gravitation, on trouve que la densité s'identifie avec la courbure totale; l'action matérielle et l'action gravitationnelle deviennent deux aspects de la même entité : « Ce serait une faute, dit Eddington, de les ajouter pour avoir une action totale. » Par contre, l'action électromagnétique est indépendante de toute action matérielle ou gravitationnelle (parce que E est nul et ne contribue pas à la courbure totale).

Par conséquent si, avec Eddington, nous supposons que la

pas d'action électromagnétique le principe d'action stationnaire se réduit à

$$\delta \int\int\int\int_{\chi} \mathrm{R}\sqrt{-g}\, d\omega = 0,$$

ce qui conduit (par de longs calculs) [1] à

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} = 0, \qquad \mathrm{R} = 0,$$

c'est-à-dire à l'absence de matière et à une courbure totale nulle. L'action ne serait stationnaire que « là où elle n'existe pas ». Le principe de moindre action, tout en restant applicable à la mécanique ordinaire et à l'électromagnétisme, ne pourrait être généralisé.

C'est là une grosse difficulté. Il ne nous semble cependant pas qu'on puisse affirmer ainsi l'inexactitude du principe de moindre action généralisé; on pourrait plutôt conclure à l'insuffisance de la conception d'après laquelle la matière serait une singularité du champ de gravitation *seul*, c'est-à-dire une simple modification des $g_{\mu\nu}$. Weyl et Eddington lui-même [2] ont uni dans une même géométrie le champ de gravitation et le champ électromagnétique; il résulte de cette extension de la géométrie d'Einstein que l'Univers peut posséder deux propriétés distinctes, la non-intégrabilité de la direction (n° 74) et la non-intégrabilité de la longueur généralisée. Il est possible d'envisager la matière, non plus uniquement comme une singularité du champ de gravitation, mais comme une singularité d'une structure géométrique plus complexe, qui entraîne à la fois la non-intégrabilité de la direction (champ de gravitation) et la non-intégrabilité de la longueur. Il faut alors envisager séparément l'action gravitationnelle et l'action matérielle, et le principe d'action stationnaire pourrait sans doute être conservé sans que la structure d'Univers (et non plus simplement la courbure R) et la matière fussent considérées comme des entités distinctes. L'action gravitationnelle par unité de quadrivolume serait la densité de courbure $\mathfrak{R} = \mathrm{R}\sqrt{-g}$, au sens de la théorie d'Einstein, liée à la non-intégrabilité de la direction; la

---

(1) EDDINGTON, *Espace-Temps, Gravitation*, partie théorique, n° 44, p. 106.

(2) *Voir* le dernier Chapitre.

partie de l'action électromagnétique dépendant des forces maxwelliennes resterait la même que dans la théorie de Lorentz-Hilbert; enfin une autre partie de l'action électromagnétique, liée à des forces non maxwelliennes qui s'introduisent dans la théorie de Weyl-Eddington (et qui sont d'ailleurs nécessaires pour que la charge de l'électron puisse subsister), serait l'action qui se présente à nos yeux sous l'aspect de l'action matérielle.

L'idée d'Eddington, que la loi de gravitation serait une identification entre grandeurs géométriques et grandeurs physiques resterait peut-être acceptable, sans entrer en conflit avec le principe d'action stationnaire.

104. Principe d'Hamilton et relativité généralisée (d'après Einstein).

Einstein s'est placé à un point de vue très général, faisant le moins possible d'hypothèses.

Le champ de gravitation est représenté par le tenseur des $g_{\mu\nu}$ (ou $g^{\mu\nu}$), la substance (matière et champ électromagnétique) par un certain nombre de fonctions de point $q_{(\rho)}$. Soit $\mathcal{H}$ une fonction des

$$g^{\mu\nu},\quad g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right),\quad g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}\left(=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma\,\partial x_\tau}\right)\quad \text{des}\quad q_{(\rho)}\quad \text{et}\quad q_{(\rho)\alpha}\left(=\frac{\partial q_{(\rho)}}{\partial x_\alpha}\right).$$

Cette fonction est supposée obéir au principe de variation

$$\delta\int\int\int\int_{\chi}\mathcal{H}\,d\omega = 0. \tag{8-16}$$

Ce principe de variation nous donne autant d'équations différentielles qu'il y a de fonctions $g_{\mu\nu}$ et $q_{(\rho)}$ à déterminer, si nous admettons que les $g^{\mu\nu}$ et $q_{(\rho)}$ doivent varier indépendamment les uns des autres, et de manière que les $\delta q_{(\rho)}$, $\delta g^{\mu\nu}$ et $\delta\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ s'annulent tous aux limites du domaine d'intégration.

Comme nous l'avons vu au numéro précédent, si nous supposons que $\mathcal{H}$ est linéaire en $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, et que les coefficients des $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ ne dépendent que des $g^{\mu\nu}$, on peut écrire

$\mathcal{H}_0$ ne dépend plus des $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, et δF est nul. Le principe de variation devient

$$\delta \int . \int \int \int_{\chi} \mathcal{H}_0 \, d\omega = 0, \tag{10-16}$$

et peut se mettre sous la forme des équations de Lagrange [1] (généralisées)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \tag{11-16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{12-16}$$

Ce sont les équations du champ de gravitation et de la substance.

Existence propre du champ de gravitation. — Si l'on ne fait aucune restriction sur la manière dont $\mathcal{H}$ dépend des $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, $q_{(\rho)}$ $q_{(\rho)\alpha}$, il est impossible de séparer les composantes d'énergie en deux parties dont l'une se rapporte au champ de gravitation et l'autre à la substance (matière et champ électromagnétique). Pour faire cette séparation, Einstein suppose que

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} + \mathcal{M}, \tag{13-16}$$

où $\mathcal{R}$ dépend seulement des $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, $\mathcal{M}$ seulement des $g^{\mu\nu}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$. Les équations (11) et (12) s'écrivent alors

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{14-16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q_{(\rho)}} = 0, \tag{15-16}$$

$\mathcal{R}_0$ étant déduit de $\mathcal{R}$ comme $\mathcal{H}_0$ est déduit de $\mathcal{H}$, par intégration partielle.

Sans doute, les équations (12) et (15) seraient à remplacer par d'autres, si nous admettions que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{H}$ dépendissent des dérivées d'ordre supérieur des $q_{(\rho)}$. On peut penser aussi que les $q_{(\rho)}$ ne sont pas absolument indépendants. Peu importe pour la suite, car nous ne ferons usage que de l'équation (14-16).

---

[1] Comparer avec le n° 79.

Conservation de l'énergie et loi de la gravitation. — Le caractère de transformation des $g_{\mu\nu}$ est déterminé par l'invariance de la forme quadratique fondamentale $ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu$. Par contre, nous ne faisons aucune hypothèse sur le caractère de transformation des $q_{(\rho)}$ qui représentent la substance.

La nécessité de la covariance générale des équations (14) et (15) déduites de (8), nous oblige à considérer $\mathcal{H}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$ comme des *densités d'invariants;* par conséquent, les fonctions

$$\mathrm{H} = \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{-g}}, \qquad \mathrm{R} = \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{-g}}, \qquad \mathrm{M} = \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-g}}$$

sont des invariants pour une transformation arbitraire des coordonnées. Il est évident (comme nous l'avons vu au numéro précédent) que R doit être à un facteur constant près (que nous posons égal à 1) et à une constante près (que nous supposerons nulle), l'invariant contracté $g^{\mu\nu}\mathrm{R}_{\mu\nu}$, car il n'y a pas d'autre invariant jouissant des propriétés exigées pour R. Cette identification détermine complètement $\mathfrak{R}_0$ et, par suite, le premier membre de l'équation (14-16) *qui doit représenter la loi de la gravitation.*

Effectuant l'intégration partielle qui permet de calculer $\mathfrak{R}_0$ à partir de $\mathfrak{R} = \mathrm{R}\sqrt{-g}$, on trouve

$$\text{(16-16)} \qquad \mathfrak{R}_0 = \sqrt{-g}\,g^{mn}\left[\begin{Bmatrix} m\beta \\ \alpha \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} n\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} mn \\ \beta \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \alpha \end{Bmatrix}\right].$$

Du principe de relativité, nous allons déduire certaines propriétés de la fonction $\mathfrak{R}_0$. Considérons une transformation infiniment petite des coordonnées, définie par

$$\text{(17-16)} \qquad x'_\nu = x_\nu + \Delta x_\nu.$$

Les Δx_ν étant des fonctions arbitraires, infiniment petites, des coordonnées; les x'_ν sont les coordonnées, dans le nouveau système, du point d'Univers dont les coordonnées étaient x_ν dans l'ancien système.

Une grandeur ψ se transforme suivant une certaine loi

$$\psi' = \psi + \Delta\psi,$$

où $\Delta\psi$ doit s'exprimer en fonction des Δx_ν. D'après la propriété

des $g^{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}_\sigma$ suivantes :

$$(18\text{-}16)\qquad \Delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\frac{\partial \Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\alpha},$$

$$(19\text{-}16)\qquad \Delta g^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial(\Delta g^{\mu\nu})}{\partial x_\sigma} - g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial \Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma}.$$

Comme $\mathfrak{R}_0$ ne dépend que des $g^{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}_\sigma$, on peut calculer $\Delta\mathfrak{R}_0$; on obtient

$$(20\text{-}16)\qquad \sqrt{-g}\,\Delta\left(\frac{\mathfrak{R}_0}{\sqrt{-g}}\right) = S^\nu_\sigma \frac{\partial \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu} + 2\frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha},$$

en posant

$$(21\text{-}16)\qquad S^\nu_\sigma = 2\frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} + 2\frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}_\alpha + \mathfrak{R}_0\, g^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial g^{\mu\alpha}_\nu} g^{\mu\alpha}_\sigma.$$

Ces deux équations nous conduisent à des conséquences importantes. Nous savons que $\frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{-g}}$ est un invariant; il n'en est pas de même de $\frac{\mathfrak{R}_0}{\sqrt{-g}}$, mais on peut démontrer que cette dernière grandeur est un invariant pour les transformations linéaires des coordonnées. Il résulte de là que le second membre de l'équation (20) doit disparaître lorsque tous les $\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha}$ s'annulent; par suite, $\mathfrak{R}_0$ doit satisfaire l'identité

$$(22\text{-}16)\qquad S^\nu_\sigma \equiv 0.$$

Choisissons les Δx_ν de manière que ces fonctions ne soient différentes de zéro qu'à l'intérieur d'un certain domaine, et s'annulent infiniment près de la limite de ce domaine; la valeur de l'intégrale (9) étendue en dehors de cette limite ne change pas pour la transformation considérée, et l'on a

$$\Delta F = 0, \qquad \Delta \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_\chi \mathfrak{R}\,d\omega = \Delta \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_\chi \mathfrak{R}_0\,d\omega$$

(en considérant $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}_0$ au lieu de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_0$).

Mais le premier membre de cette équation est nul, puisque $\frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{-g}}$ et $\sqrt{-g}\,d\omega$ sont des invariants; par conséquent, le second membre est nul; d'après (20), (21), (22), nous obtenons l'équa-

tion

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{\chi} \frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial g^{\mu\sigma}_{\alpha}} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \, \partial x_\alpha} d\omega = 0. \tag{23-16}$$

Par double intégration partielle, on obtient, les Δx_σ étant arbitraires,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \, \partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial g^{\mu\sigma}_{\alpha}} g^{\mu\nu}\right) \equiv 0. \tag{24-16}$$

Les identités (22) et (24) qui résultent de l'invariance de $\frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{-g}}$, et par conséquent du principe de relativité, nous donnent les conséquences suivantes :

Transformons les équations (14) du champ de gravitation en les multipliant par $g^{\mu\sigma}$; nous obtenons (après permutation des indices σ et ν) les équations équivalentes

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial g^{\mu\sigma}_{\alpha}} g^{\mu\nu}\right) = -\left(\mathfrak{T}^\nu_\sigma + \mathfrak{t}^\nu_\sigma\right), \tag{25-16}$$

en posant

$$\mathfrak{T}^\nu_\sigma = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}, \tag{26-16}$$

équation qui définit le tenseur d'énergie, et

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}^\nu_\sigma &= -\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial g^{\mu\sigma}_{\alpha}} g^{\mu\nu}_{\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathfrak{R}_0 g^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial g^{\mu\alpha}_{\nu}} g^{\mu\alpha}_{\sigma}\right) \qquad \text{[d'après (21) et (22)].} \end{aligned} \tag{27-16}$$

Par dérivation de (25) par rapport à x_ν, on obtient, d'après (24),

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\mathfrak{T}^\nu_\sigma + \mathfrak{t}^\nu_\sigma\right) = 0, \tag{28-16}$$

formule qui exprime la conservation de $\mathfrak{T}^\nu_\sigma + \mathfrak{t}^\nu_\sigma$.

Des équations (14), il résulte, après multiplication par $g^{\mu\nu}_{\sigma}$ et en tenant compte de (27),

$$\frac{\partial \mathfrak{t}^\nu_\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

ou, d'après (26) et (27),

$$\frac{\partial \mathfrak{T}^\nu_\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_{\sigma} \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0 \tag{29-16}$$

La matière doit satisfaire les quatre équations représentées par (29) [1].

Einstein a appelé les $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ les composantes d'énergie de la matière, les $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ les composantes de l'énergie du champ de gravitation. Les équations (28) ou (29) expriment la loi générale de conservation de l'impulsion-énergie.

Il nous semble utile de montrer que les $\mathfrak{T}_\nu^\sigma$ s'identifient bien avec les composantes de la densité tensorielle d'énergie, telle qu'elle a été définie au Chapitre XIV.

Dans le cas de la relativité restreinte, où les $g_{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}$ sont constants, les $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ sont nuls. La loi (28) exprime alors la conservation de $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$. Or nous ne connaissons qu'une chose qui se conserve : c'est l'impulsion-énergie dont l'expression la plus générale est le tenseur T_ν^σ défini au n° 81; on peut dire encore que les équations (28) doivent être identifiées avec les équations connues de l'hydrodynamique (en l'absence d'un champ de force). Les $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ représentent donc, dans ce cas cas particulier, les composantes du tenseur matériel T_σ^ν.

La loi covariante qui doit, dans le cas général, remplacer la loi de conservation $\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x_\nu}$ de la relativité restreinte, s'exprime par l'annulation de la divergence de T_σ^ν, c'est-à-dire par les équations

$$T_{\sigma\nu}^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\, T_\sigma^\nu) + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0.$$

Comparant ces équations aux équations (29), nous voyons que les $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ des équations (25), (26), (28), (29) s'identifient avec les $\sqrt{-g}\, T_\sigma^\nu$, c'est-à-dire, non pas avec les composantes du tenseur impulsion-énergie, mais avec les composantes de la densité tensorielle impulsion-énergie (à un facteur constant près, qui peut être fait égal à 1 par un choix convenable des unités).

Les équations (28) nous montrent que les quantités $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ représentent une densité d'énergie qui ne dépend que des $g_{\mu\nu}$, des $g^{\mu\nu}$ et de leurs dérivées. Les $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ peuvent donc être considérés comme les composantes de la densité d'énergie du champ de gravitation.

---

[1] Il est à remarquer que les équations de conservation (28) et (29) sont déduites uniquement des équations (14) du champ de gravitation et du principe

La loi de la gravitation va maintenant s'exprimer (comme au n° 83) en posant l'égalité du tenseur T_μ^ν dont la divergence est nulle, et du tenseur de courbure à divergence nulle $R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R$. Mais d'ailleurs la loi de gravitation est toute trouvée; elle est exprimée par les équations (14), d'où l'on peut déduire les formes précédemment données (la constante $\varkappa$ étant faite égale à 1).

La théorie de la gravitation peut donc être complètement établie par une généralisation du principe d'Hamilton.

CHAPITRE XVII.

LA COURBURE DE L'ESPACE ET DU TEMPS.

I. — L'ESPACE FINI.

105. Le scalaire R. Action gravitationnelle et courbure totale.

Nous avons vu, au Chapitre précédent, que $\mathfrak{R} = R\sqrt{-g}$ est la densité d'action gravitationnelle. Nous allons maintenant envisager le scalaire R sous un autre aspect, en montrant qu'il a encore une autre signification; c'est la courbure totale d'Univers en chaque point-événement.

Imaginons un hyperespace à quatre dimensions limitant un hypervolume dans un hyperespace *euclidien* à *cinq* dimensions [1], comme une surface courbe à deux dimensions limite un volume à trois dimensions.

Par extension d'une formule connue pour les surfaces, l'équation de l'hyperespace quadridimensionnel, rapportée aux lignes de courbure passant par un de ses points et à la normale (z) en ce point peut s'écrire

$$(1\text{-}17) \qquad 2z = \frac{x_1^2}{R_1} + \frac{x_2^2}{R_2} + \frac{x_3^2}{R_3} + \frac{x_4^2}{R_4} + \text{termes de puissances supérieures.}$$

R_1, R_2, R_3, R_4 sont les rayons de courbure principaux.

D'autre part, l'hyperespace à cinq dimensions étant supposé euclidien, on peut poser

$$(2\text{-}17) \qquad ds^2 = -dz^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2.$$

Éliminant z entre (1 — 17) et (2 — 17), nous obtenons l'expres-

[1] Nous envisageons seulement un cas particulier, car un hyperespace à quatre dimensions du type le plus général ne serait euclidien que dans un continuum euclidien à dix dimensions.

sion de ds^2 pour l'hyperespace quadridimensionnel

$$(3\text{-}17)\qquad ds^2 = -\left(1+\frac{x_1^2}{R_1^2}\right)dx_1^2 - \ldots - \frac{2x_1x_2}{R_1R_2}dx_1\,dx_2 - \ldots.$$

Dans le cas de l'Espace-Temps, ds est un intervalle d'Univers si nous regardons les x_μ comme des variables d'espace; il y a alors une coordonnée temps imaginaire (le temps peut être considéré comme une longueur imaginaire).

A l'origine, on a

$$g_{\mu\mu} = -1;\qquad g_{\mu\nu} = 0\quad(\mu \neq \nu);\qquad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = 0;$$

les seuls termes qui subsistent à l'origine dans l'expression de l'invariant contracté $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ sont

$$-g^{\rho\mu}\frac{\partial}{\partial x_\rho}\begin{Bmatrix}\mu\mu\\ \rho\end{Bmatrix} + g^{\mu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\begin{Bmatrix}\mu\rho\\ \rho\end{Bmatrix}.$$

Calculant les symboles de Christoffel, on trouve

$$(4\text{-}17)\qquad R = 2\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_1R_3}+\frac{1}{R_1R_4}+\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_2R_4}+\frac{1}{R_3R_4}\right).$$

R est donc une généralisation de la courbure de Gauss $\left(\frac{1}{R_1R_2}\right)$ considérée dans la théorie des surfaces, comme nous l'avions annoncé (n° 75); c'est la *courbure totale*.

Voici deux cas particuliers qui se présenteront dans la suite :

1° Si nous avons un *espace sphérique* de rayon U et un *temps rectiligne* (à courbure nulle),

$$U = R_1 = R_2 = R_3,\qquad R_4 = 0,$$

$$(5\text{-}17)\qquad R = \frac{6}{U^2};$$

2° Si nous avons un Univers sphérique de rayon U,

$$U = R_1 = R_2 = R_3 = R_4,$$

$$(6\text{-}17)\qquad R = \frac{12}{U^2}.$$

106. La substance présente dans l'Univers doit être limitee et l'espace ne doit pas être infini.

Il est un fait démontré : l'Univers n'est pas euclidien dans son ensemble. Il possède en chaque point-événement des lignes de courbures connexes du champ de gravitation, courbures auxquelles contribue toute substance [1] existante. Ce n'est plus seulement, comme en relativité restreinte, l'union de l'espace et du temps, c'est l'union de l'espace, du temps et de la substance.

Il est donc impossible de conserver l'ancienne conception de l'Univers, qui comportait d'ailleurs des difficultés connues depuis longtemps et que nous allons brièvement résumer [2]. L'espace de Newton est infini : prenant comme unité de volume un volume suffisamment grand, une première hypothèse est que la matière est répandue partout avec une même densité moyenne ρ ; la quantité de matière est alors infinie comme l'espace. D'après la théorie de Newton, il aboutit à une masse m des lignes de force, venant de l'infini, dont le nombre est proportionnel à m; une sphère de volume V contient, en moyenne, une masse ρV ; par conséquent, le nombre des lignes de force qui entrent dans la sphère est proportionnel à ρV, et, par unité de surface, il pénètre un nombre de lignes de force proportionnel à $\frac{\rho V}{S}$, c'est-à-dire proportionnel au rayon de la sphère considérée. L'intensité du champ à la surface de la sphère augmenterait donc indéfiniment avec un rayon croissant, résultat qui n'a aucun sens, puisqu'un point quelconque peut être considéré comme étant sur la surface d'une sphère de rayon arbitraire.

La loi de Newton n'est pas la loi exacte, mais si l'on admet que l'espace est infini et que la densité moyenne de la matière est

---

[1] Le mot *substance* désignant toute portion d'Univers où l'un au moins des tenseurs T_μ^ν et E_μ^ν n'est pas identiquement nul. Il ne faut d'ailleurs pas oublier que E_μ^ν ne contribue en rien à une variation de la courbure *totale* R, puisque $E = 0$.

[2] EINSTEIN, *La théorie de la relativité restreinte et généralisee mise à la*

partout la même, la loi d'Einstein conduit à la même contradiction.

Doit-on alors supposer que l'Univers a une sorte de centre près duquel la densité de la matière est maximum et autour duquel la matière se raréfie jusqu'au vide complet ? La matière formerait une île dans l'espace infini. Mais s'il en était ainsi, toute énergie rayonnante sortie de cette île se propagerait à l'infini, sans retour, et se dissiperait; la matière elle-même se disperserait, comme l'atmosphère d'un astre qui s'évapore peu à peu dans l'espace. Il faudrait alors admettre que, puisque l'Univers n'est pas mort, la matière n'existe que depuis un temps limité, ce qui recule toutes les difficultés et n'en résout aucune.

Pour un homme intelligent qu'on aurait laissé dans l'ignorance de la forme de la Terre, la disparition progressive d'un navire sous l'horizon serait une révélation; ayant compris que la surface est courbe, cet homme envisagerait la possibilité d'une surface finie, d'un monde fermé. Pareille révélation nous est donnée par la théorie d'Einstein, par le simple fait qu'un rayon lumineux peut ne pas se propager en ligne droite dans le vide. Nous sommes donc amenés à penser que l'Univers pourrait ne pas être infini dans toutes ses dimensions; il est même possible — ce sont les hypothèses d'Einstein et de De Sitter — que l'espace soit *fini, bien qu'illimité* comme la surface d'une sphère qui ne comporte pas de bornes, puisqu'on peut en faire le tour indéfiniment. Le temps seul resterait infini.

Nous allons maintenant exposer des raisons profondes qui conduisent à attribuer à l'Univers une courbure non nulle, même dans le vide, et à considérer l'espace comme fini.

107. La théorie électronique de la matière conduit à attribuer à l'Univers une courbure totale constante et différente de zéro dans le vide.

Jusqu'à présent, nous avons adopté comme loi de gravitation dans le vide les équations

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{7-17}$$

loi nécessaire *si l'Univers est infini et euclidien à l'infini* puisque alors la loi doit comporter comme solution particulière $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$.

Partant de cette loi, nous avons été conduits à prendre comme loi de gravitation en tout point où se trouvent de la matière et de l'énergie électromagnétique

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa(T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}), \tag{8-17}$$

$T_{\mu\nu}$ et $E_{\mu\nu}$ étant les tenseurs matériel et électromagnétique.

Les lois précédentes entraînent les conséquences suivantes :

1° Dans le vide, $R_{\mu\nu} = 0$ et *a fortiori* la courbure totale $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R$ est nulle [1];

2° En toute région où se trouve de l'énergie électromagnétique, sans matière, $R_{\mu\nu} \neq 0$, mais la courbure totale R est encore nulle, *parce que l'invariant contracté* $g^{\mu\nu}E_{\mu\nu}$ *du tenseur d'énergie électromagnétique est nul* (30-15); en faisant $T_{\mu\nu} = 0$ dans l'équation (8) et prenant les scalaires des deux membres, on a bien, en effet, $R = 0$;

3° S'il y a de la matière seule, en prenant les scalaires on obtient, comme nous l'avons montré précédemment (50-14),

$$R = \varkappa\rho_0 \qquad (\rho_0, \text{ densité propre}). \tag{9-17}$$

Pour le moment, aucune contradiction ne se présente. Mais il importe d'insister sur le fait que les équations « matérielles », où figure le tenseur $T_{\mu\nu}$ défini au n° 81, représentent l'*aspect macroscopique* des phénomènes : l'introduction de la densité de la matière implique que celle-ci est considérée comme continue.

Cherchons à pénétrer plus loin en envisageant l'*aspect microscopique* et remontant à la structure électronique de la matière.

Nous avons montré, en relativité restreinte (n° 42), que la masse au repos de l'électron n'est égale à son énergie potentielle totale divisée par c^2 que si l'on admet, avec Henri Poincaré, une pression exercée par le milieu extérieur; cette pression est néces-

---

[1] Comme nous l'avions déjà dit au n° 75, $R = 0$ ne signifie pas que l'Espace-Temps est euclidien. La courbure *totale* peut être nulle sans que toutes les courbures principales soient nulles.

saire pour équilibrer la tension électrostatique qui produirait la dissipation de la charge; tout électron est donc dans un champ de force, dans un champ de gravitation, et nous avons vu que le quart de l'énergie constituant la masse au repos est dû à ce champ, les trois autres quarts étant dus au champ électrostatique ([1]).

Ces forces de cohésion doivent apporter ce qu'il faut pour construire l'électron (et par suite la matière) que les forces maxwelliennes seules ne suffisent pas à expliquer (fin du n° 101).

Comment pouvons nous écrire la loi microscopique de la gravitation? nous ne pouvons plus conserver la densité ρ qui est une conception macroscopique; il ne doit plus intervenir autre chose que l'énergie du champ électromagnétique des électrons et l'énergie du champ de force formé par les pressions de Poincaré. Ainsi, le tenseur matériel T_μ^ν doit disparaître, mais nous devons conserver le tenseur E_μ^ν qui n'est plus maintenant le tenseur d'énergie électromagnétique pour les phénomènes envisagés à notre échelle, et qui devient l'expression la plus générale de l'énergie du champ des électrons. La formule microscopique, si l'on applique la loi admise jusqu'à présent, devrait être

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R = -\varkappa E_\mu^\nu. \tag{10-17}$$

Il n'y a pas à ajouter au second membre l'énergie due aux pressions de Poincaré; cette énergie doit être contenue implicitement dans le tenseur de courbure qui figure au premier membre.

On rencontre ici une difficulté insurmontable si l'on veut conserver la loi précédente. L'invariant contracté de E_μ^ν étant nul, celui du premier membre doit être nul; on aurait donc, en tout point d'Univers, $R = 0$; la courbure totale R étant nulle partout, sa valeur moyenne dans la matière serait nulle et comme, remontant maintenant à l'aspect macroscopique, on a $R = \varkappa\rho_0$, on

([1]) Le raisonnement du n° 42 suppose que l'électron est assimilable à une sphère chargée superficiellement; or l'expérience ne nous apprend rien de la structure intime de l'électron, et nous verrons au Chapitre XVIII qu'on est conduit à une conception de l'électron différente de la précédente. Cependant, quelle que soit la structure réelle, la conclusion que l'électron doit subir l'action

obtiendrait toujours $\rho_0 = 0$, résultat absurde : il n'y aurait pas de matière. C'est d'ailleurs ce que nous avons déjà dit : le tenseur d'énergie électromagnétique ne peut pas contribuer à former une densité de matière.

On peut encore montrer cette contradiction de la façon suivante : la divergence du premier membre de (10-17) étant identiquement nulle, la divergence de E_μ^ν devrait être nulle. Or, d'après les équations de l'électromagnétique, $E_{\mu,\nu}^\nu = 0$ entraîne $F_{\mu\alpha} J^\alpha = 0$. La densité de courant serait nulle en tout point; il n'y aurait nulle part ni courant de convection, ni densité de charge : il n'y aurait pas d'électrons.

Il est donc nécessaire de corriger la loi de la gravitation. Puisque l'invariant contracté de $E_{\mu\nu}$ est nul, nous devons identifier $E_{\mu\nu}$ avec un tenseur de courbure dont l'invariant contracté soit nul.

Le tenseur du second ordre le plus général contenant les $g_{\mu\nu}$, leurs dérivées premières et secondes et linéaire par rapport à ces dernières est de la forme

$$c_1 R_{\mu\nu} + c_2 R g_{\mu\nu} + c_3 g_{\mu\nu}, \tag{11-17}$$

c_1, c_2, c_3 étant des constantes.

Nous avions donc fait une restriction en posant $c_3 = 0$; il est temps de la supprimer et de déterminer c_3 par la condition que l'invariant contracté du tenseur général soit nul; nous obtenons le tenseur

$$c_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right).$$

Nous devons donc écrire

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R = - \varkappa E_{\mu\nu}, \tag{12-17}$$

équations qui expriment la loi de la gravitation, si $E_{\mu\nu}$ désigne le tenseur d'énergie du champ électromagnétique des électrons.

Formons la divergence des deux membres de

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{4} g_\mu^\nu R = - \varkappa E_\mu^\nu,$$

nous obtenons immédiatement, par application des équations

de l'électromagnétisme et en remarquant que la divergence de $R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} R$ est identiquement nulle,

$$\frac{1}{4} \frac{\partial R}{\partial x_{\mu}} = - \frac{\varkappa}{c^2} F_{\mu\alpha} J^{\alpha}. \tag{13-17}$$

Partout où $J^{\alpha} = 0$, c'est-à-dire en dehors des lignes d'Univers des électrons, la courbure totale R est constante; *cette courbure est donc la même dans le vide et aux points où se trouve de l'énergie libre* [1] (*énergie rayonnante*); de plus *la courbure dans le vide n'est pas nulle*, car une courbure nulle dans le vide (où $E_{\mu\nu} = 0$) entraînerait d'après (12-17) $R_{\mu\nu} = 0$; on retomberait sur la loi que nous devons abandonner.

D'après (12) la loi dans le vide s'écrit

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R = 0,$$

ou, en appelant R_0 la courbure dans le vide et posant

$$R_0 = 4\lambda, \tag{14-17}$$

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{15-17}$$

Dès le début (nº 75), nous avions indiqué cette loi comme une loi possible et nous avions fait pressentir qu'on serait conduit à l'adopter.

S'il y a de la matière présente, l'équation *macroscopique* s'obtient en écrivant (nº 83) la proportionnalité entre le tenseur de courbure conservatif

$$R'^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} R' \qquad (R'^{\nu}_{\mu} = R_{\mu}^{\nu} - \lambda g_{\mu}^{\nu},\ R' = R - 4\lambda)$$

et le tenseur matériel T_{ν}^{μ} dont la divergence est nulle,

$$R'^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} R' = -\varkappa T_{\mu}^{\nu}, \tag{16-17}$$

ou

$$R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R' = -\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{17-17}$$

---

[1] Ne pas oublier que J^{α} représente le courant de convection et la densité de charge, mais non le courant de déplacement de Maxwell. $J^{\alpha} = 0$, comme dans le vide, aux points où il y a de l'énergie rayonnante.

et

$$R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R' = -\varkappa (T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}),$$

si la matière contient des charges et des courants, ou enfin

$$(18\text{-}17) \qquad R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} = -\varkappa \left(T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).$$

La pression de Poincaré. — Aux points d'Univers où sont présentes des charges électriques, écrivons, d'après (14-15),

$$(19\text{-}17) \qquad J^{\mu} = P_0 \frac{dx_{\mu}}{ds},$$

P_0 étant la charge totale (invariante) par unité de volume propre. Multipliant les deux membres de (13-17) par J^{μ} (multiplication intérieure) et remarquant que $J^{\alpha} J^{\mu} F_{\mu\alpha} = 0$ parce que $F_{\mu\alpha}$ est symétrique gauche, nous obtenons

$$(20\text{-}17) \qquad \frac{\partial R}{\partial x_{\mu}} \frac{dx_{\mu}}{ds} = 0.$$

La courbure totale R est donc constante sur chaque ligne d'Univers d'une charge; elle a d'ailleurs une valeur différente de la courbure R_0 dans le vide, car la loi macroscopique (17-17) donne dans la matière une courbure moyenne telle que

$$(21\text{-}17) \qquad R - R_0 = \varkappa \rho_0 \neq 0.$$

Ainsi, les lignes d'Univers des électrons constituent des sortes de rides sur lesquelles la courbure est modifiée. Einstein a suggéré l'idée que la courbure totale R joue le rôle d'une pression négative : en dehors du corpuscule, la pression n'a pas la même valeur qu'à l'intérieur; c'est la variation de courbure $(R - R_0)$ ou plus exactement le champ de force déterminé par cette variation qui empêche la dissipation de la charge de l'électron. La courbure (moyenne) à l'intérieur de l'électron est constante dans le temps.

On voit que, dans l'aspect microscopique, $R - R_0$ détermine la pression de Poincaré; dans l'aspect macroscopique, $(R - R_0)$ représente la densité de la matière, R étant alors une courbure moyenne.

loi de la gravitation n'entraîne aucun changement dans les principes généraux de la mécanique. Il suffit de remplacer partout le tenseur $R_{\mu\nu}$ par le tenseur $R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}$ et le scalaire R par le scalaire $R' = R - 4\lambda = R - R_0$. Puisque la divergence de $R'^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} R'$ est identiquement nulle, la loi corrigée (16-17) est en plein accord avec le principe de conservation de l'impulsion-énergie : elle a d'ailleurs été écrite de manière qu'il en soit ainsi. Enfin, la densité d'action de gravitation [1] sera prise égale à $\sqrt{-g}(R - 4\lambda)$ au lieu de $\sqrt{-g}R$.

Dans les applications astronomiques le terme très petit $\lambda g_{\mu\nu}$ peut être négligé, et la courbure dans le vide peut être pratiquement considérée comme nulle.

108. L'espace fermé.

Les vitesses relatives des astres sont toujours très petites par rapport à la vitesse de la lumière. Cette remarque nous permet d'envisager un système de référence relativement auquel la matière est, *en moyenne*, au repos et dans lequel les vitesses individuelles sont faibles. Dans ce système, la matière est quasi stationnaire.

Considérant l'Univers, non plus seulement sous l'aspect macroscopique de la matière, mais sous l'aspect ultra-macroscopique ou « cosmique » de l'ensemble des mondes, nous pouvons imaginer un très grand volume d'espace [par exemple 1000 parsecs-cubes [2]] dans lequel nous envisageons une densité moyenne ρ de la matière. Supposons que cette densité (au repos) moyenne soit constante dans l'Univers, ce qui est la seule hypothèse logique. Nous pouvons, dans cet aspect ultra-macroscopique, ne tenir compte que de la distribution générale de la matière, faire abstraction des irrégularités locales peu importantes dans l'ensemble et

---

(1) Il est à remarquer que dans la théorie exposée au n° 103, nous devons poser $\frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{-g}} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} +$ const.; c'est arbitrairement que nous avions annulé la constante. En la désignant par -4λ, on trouve la loi corrigée.

(2) Le parsec est la distance à laquelle la parallaxe est 1″. 1 parsec $= 3.10^{13}$ km

es champs de gravitation locaux [1], négliger les pressions et utres forces internes dans la matière.

Dans cet aspect cosmique, le tenseur $T_{\mu\nu}$ se réduit sensiblement la composante

$$T_{44} = g_{44}\rho$$

t les équations de la gravitation s'écrivent

$$(22\text{-}17)\quad \begin{cases} R_{\mu\nu} - \left(\lambda + \frac{1}{2}\varkappa\rho\right) g_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \text{ et } \nu \text{ ne sont pas tous deux égaux à } 4, \\ R_{44} - \left(\lambda + \frac{1}{2}\varkappa\rho\right) g_{44} = -\varkappa g_{44}\rho. \end{cases}$$

Prenant la position de l'observateur comme origine des coordonnées et adoptant des coordonnées sphériques, une première olution de ces équations donne les $g_{\mu\nu}$ de l'expression suivante our ds^2 :

$$ds^2 = -dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + c^2\, dt^2$$

vec

$$\rho = 0, \qquad \lambda = 0.$$

C'est la solution de la théorie primitive, l'Espace-Temps infini t euclidien, c'est-à-dire euclidien s'il n'y avait pas des condenations locales que précisément nous négligeons. Cette solution $\lambda = 0$) est justement celle que nous rejetons pour les raisons précédemment exposées.

Mais il y a deux autres solutions :

Solution d'Einstein :

$$(23\text{-}17)\quad \begin{cases} ds^2 = -dr^2 - U^2 \sin^2 \frac{r}{U}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + c^2\, dt^2 \\ \text{avec} \\ \varkappa\rho = 2\lambda, \qquad \lambda = \frac{1}{U^2}. \end{cases}$$

Solution de de Sitter :

$$(24\text{-}17)\quad \begin{cases} ds^2 = -dr^2 - U^2 \sin^2 \frac{r}{U}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \cos^2 \frac{r}{U} c^2\, dt^2 \\ \text{avec} \\ \rho = 0, \qquad \lambda = \frac{3}{U^2}. \end{cases}$$

---

[1] Bien faibles, en somme, si l'on remarque qu'un rayon lumineux passant tangentiellement au bord du Soleil est dévié seulement de 1",74.

Posons $r = \mathrm{U}\chi$ (coordonnée curviligne).

L'élément de ligne d'Univers s'écrit :

Solution d'Einstein :

$$ds^2 = -\mathrm{U}^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] + c^2\, dt^2. \tag{25-17}$$

Solution de de Sitter :

$$ds^2 = -\mathrm{U}^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] + \cos^2\chi\, c^2\, dt^2. \tag{26-17}$$

Dans les deux solutions, la « coupe à temps constant » $(dt = 0)$ est un *espace à courbure constante positive*, de rayon U.

L'espace est fermé.

II. — HYPOTHÈSES SUR LA FORME DE L'UNIVERS.

109. Hypothèse d'Einstein. L'espace sphérique ou elliptique. Le temps d'Univers rectiligne. L'Espace-Temps cylindrique.

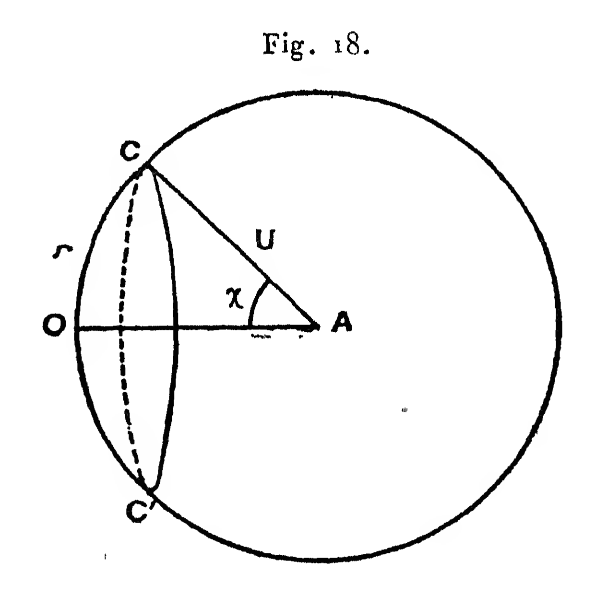
Pour mieux concevoir la solution d'Einstein [(23-17), (25-17)], supprimons une des dimensions de l'espace. Imaginons des êtres infiniment plats, entourés d'objets à deux dimensions, assujettis à vivre sur une surface sphérique sans avoir la perception d'une troisième dimension d'espace. Confondant la surface de leur monde sphérique avec le plan tangent, ils imagineront la géométrie plane (euclidienne) et penseront d'abord que leur univers s'étend à l'infini. Ils appelleront *ligne droite* le plus court chemin d'un point à un autre. S'ils portent autour d'un même point, dans toutes les directions, des longueurs égales, ils construiront un cercle, et tant que le rayon sera petit, ils trouveront que le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre indépendant du rayon $\pi = 3{,}1415....$ Cependant, s'ils tracent des cercles de « rayons » de plus en plus grands — ce qu'ils appellent *rayon* étant un arc de grand cercle puisqu'ils restent sur la surface — ils constateront que le rapport de la circonférence à ce qu'ils appellent le *diamètre* devient inférieur à π et diminue à mesure que le rayon

augmente, enfin que la circonférence elle-même décroît et finit par se réduire à un point : le point antipode.

Les mathématiciens de ce monde comprendront que leur univers est courbe; ils déduiront de leurs mesures d'arpentage que c'est une surface à courbure constante positive, *finie bien qu'illimitée*, limitant un « hypercercle » à trois dimensions dont ils pourront calculer le rayon.

Soient O l'origine des coordonnées, prise en un point de la

Fig. 18.



surface sphérique, A le centre, χ l'angle OAC, θ l'angle azimutal du plan OAC. L'élément de longueur en un point C est

$$dl^2 = U^2\, d\chi^2 + U^2 \sin^2\chi\, d\theta^2,$$

U étant le rayon de la sphère. L'élément de ligne d'Univers a pour expression

$$(27\text{-}17) \qquad ds^2 = -\,dl^2 + c^2\, dt^2 = -\,U^2(d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\theta^2) + c^2\, dt^2.$$

Ajoutant une dimension d'espace, nous avons l'Univers à courbure constante d'Einstein, la formule (25-17) étant l'extension de (27-17) avec une dimension supplémentaire mesurée par φ.

Faisant $dt = 0$ dans la formule (25-17), nous obtenons l'expression de l'élément de longueur dans l'espace

$$(28\text{-}17) \qquad dl^2 = U^2[\,d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)].$$

L'espace à courbure constante positive a deux formes possibles : l'espace *sphérique de Riemann* et l'espace *elliptique de*

Newcomb, tous deux représentés par l'équation (28). Nous nous bornerons à étudier l'espace sphérique.

Cet espace est difficile à se représenter : il n'a absolument rien de commun avec l'intérieur d'une sphère ordinaire dans un espace à trois dimensions : *il limite une hypersphère dans un espace à quatre dimensions comme une surface sphérique limite une sphère.*

Si nous portons sur la surface d'une sphère ordinaire, à partir du point O et dans toutes les directions, des longueurs égales $OC = U\chi$, nous obtenons le cercle CC' dont la circonférence a pour longueur $2\pi U \sin\chi$ et dont le rayon curviligne (mesuré sur la surface) est $OC = r = U\chi$. De même dans l'espace courbe qui limite une hypersphère quadridimensionnelle, si nous portons à partir d'un point des longueurs r égales (mesurées sur des fils tendus), nous obtenons une sphère dont le rayon (mesuré dans l'espace sphérique tridimensionnel) est $r = U\chi$ et dont la surface est $4\pi U^2 \sin^2\chi$. Portons des longueurs de plus en plus grandes, nous obtenons des sphères de surfaces croissantes jusqu'au rayon $\frac{1}{2}\pi U$, ensuite les sphères décroissent jusqu'à se réduire à un point, le point antipode à la distance πU.

Le volume total de l'espace sphérique est $2\pi^2 U^3$ (l'espace elliptique de Newcomb a un volume $\pi^2 U^3$).

La masse totale de la matière, de densité moyenne ρ, est

$$M = 2\pi^2 U^3 \rho \tag{29-17}$$

et comme l'on a, d'après (23-17),

$$\rho = \frac{2\lambda}{\varkappa}; \qquad \lambda = \frac{1}{U^2},$$

nous obtenons les relations suivantes :

$$U = \sqrt{\frac{2}{\varkappa\rho}}; \qquad U = \frac{\varkappa}{4\pi^2} M; \qquad M = \sqrt{\frac{32\pi^4}{\varkappa^2 \rho}}. \tag{30-17}$$

On voit que, dans l'hypothèse d'Einstein, la courbure d'ensemble de l'espace est déterminée par la matière mondiale.

Il est difficile de vérifier si cette conception est exacte. On a

masse du système stellaire est de l'ordre de 10^9 fois celle du Soleil; admettons que les nébuleuses spirales représentent 1 000 000 de fois cette masse [1]; on obtiendrait ainsi, d'après la seconde formule (30), un rayon de l'ordre de 10^{15} kilomètres, et le tour de l'Univers $2\pi U$ serait de l'ordre de 10^{15} à 10^{16} kilomètres, ce qui représente 100 à 1000 années de lumière; ce résultat est absurde, car la distance moyenne des étoiles visibles à l'œil nu dépasse 100 années de lumière. On serait donc conduit à admettre l'existence d'énormes quantités de matière non découvertes : ceci est d'ailleurs possible, car seule la matière lumineuse se révèle à nous; nous ne connaissons pas les mondes obscurs [2], c'est-à-dire d'une part les amas très peu condensés, d'autre part les étoiles éteintes qui peuvent être très nombreuses; de plus, la lumière émanée des astres très lointains peut être trop absorbée par la matière disséminée dans l'espace pour parvenir jusqu'à nous en quantité appréciable.

On peut aborder autrement la question en cherchant à évaluer la densité moyenne. Si l'on admet, avec Kapteyn, que la masse contenue dans 1000 parsecs-cubes est, en moyenne, 80 fois la masse du Soleil, on trouve un rayon $U = \sqrt{\frac{2}{\varkappa\rho}}$ de l'ordre de 10^{20} kilomètres; mais ce chiffre est bien incertain, d'autant plus que, s'il y a de la matière obscure, la densité moyenne est plus forte et le rayon moins grand.

Le temps d'Univers. — Ce qu'il y a de plus remarquable dans l'hypothèse d'Einstein, c'est qu'elle constitue un retour à l'espace absolu et au temps absolu. Einstein a rétabli la séparation entre l'espace et le temps, en admettant un Univers cylindrique, la direction des génératrices donnant un temps d'Univers absolu. Mais c'est un absolu dont nous n'avons pas connaissance en toute rigueur car, pour nous, l'espace et le temps restent unis suivant la conception de Minkowski; le temps *que nous mesurons*, variable d'un système à l'autre, variable d'un point à un autre dans un champ de gravitation, n'est pas ce temps d'Univers absolu.

---

(1) EDDINGTON, *Report on the relativity theory of gravitation*, 1920, p. 86.

(2) Cependant dans la nébuleuse d'Orion (photographie prise à l'observatoire Lick) on a constaté des régions sombres qui paraissent dues à de la matière

Toutefois, puisque les vitesses relatives des mobiles naturels sont toujours très petites par rapport à la vitesse de la lumière, que les champs de gravitation ne déforment que bien peu l'espace et le temps, s'il existe un système de référence où le temps est absolu et où la matière est quasi stationnaire, les temps mesurés dans les différents systèmes naturels sont bien voisins du temps d'Univers; l'écart ne serait notable que si l'on parvenait à réaliser des vitesses considérables par rapport à l'ensemble de la matière mondiale.

Les géodésiques de l'hypersphère émanées d'un même point se coupent au point antipode et reviennent au point de départ (comme les grands cercles d'une sphère). Les rayons lumineux pourraient donc revenir après avoir fait le tour de l'Univers (trajet $2\pi U$).

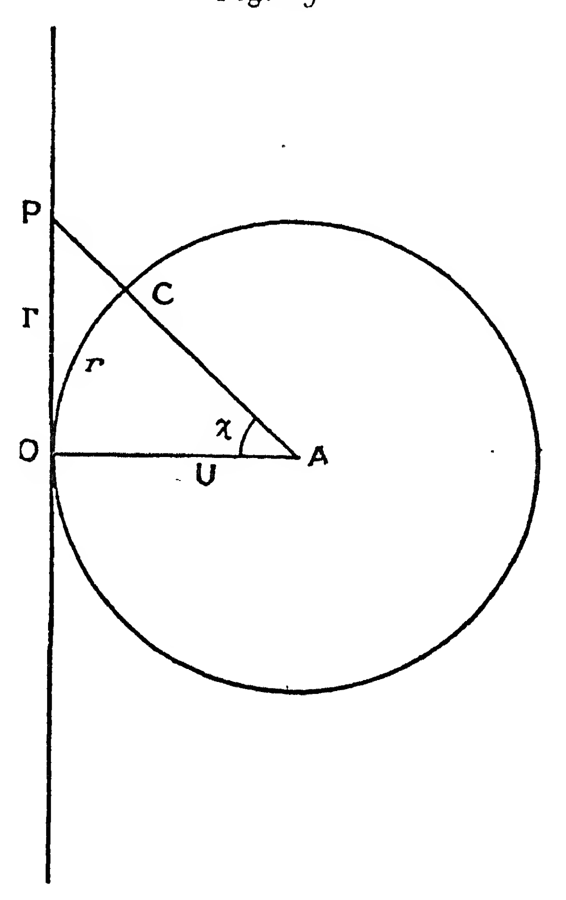
On a alors fait l'objection suivante : on devrait voir un anti-soleil au point du ciel opposé au Soleil. Cet anti-soleil aurait même diamètre apparent que le Soleil; la face qu'on verrait ainsi serait la face opposée à la Terre et, s'il n'y avait pas d'absorption, l'anti-soleil serait aussi brillant que le Soleil lui-même. Ce n'est pas une objection sérieuse, car ce raisonnement suppose un retour rapide des ondes lumineuses, c'est-à-dire admet un rayon d'Univers relativement petit, ce qui est certainement faux. Si l'anti-soleil pouvait être visible, ce serait l'astre tel qu'il était au moment du départ des ondes lumineuses, à une époque où il se trouvait fort loin de sa position actuelle; il aurait seulement l'aspect d'une étoile.

Quant aux étoiles, elles pourraient être vues en double, ou même en triple après deux tours d'Univers des rayons lumineux; beaucoup d'étoiles ne seraient que des fantômes d'un passé très reculé.

Cette conception des anti-étoiles n'est pas vraisemblable; elle admet que la lumière pourrait faire le tour de l'Univers sans être trop absorbée, ce qui est peu probable. D'autre part, elle suppose que les géodésiques se ferment exactement; or il ne faut pas oublier que l'équation (25-17) suppose la matière uniformément répandue, et que, par conséquent, cette équation ne peut donner

d'Einstein est exacte, l'espace n'est que quasi sphérique : il a u
courbure *moyenne* constante $R = \frac{6}{U^2}$ (d'après 5-17) ou $R = 6$

Fig. 19.



puisque $\lambda = \frac{1}{U^2}$ (23-17), mais sa courbure est plus grande a
points où la densité dépasse la moyenne ρ, et diminue jusqu'à
s'il n'y a aucune matière (14-17).

Figurons une sphère ordinaire et soit O un point de la surfac
Du centre A, on peut faire la projection conique de la surface s
le plan tangent en O. De même, projetons l'espace sphérique s
l'espace euclidien tangent au point O, où se trouve l'observate
Soit **r** la distance OP de ce point origine à la projection P d'
point de l'espace sphérique; nous allons remplacer la coordonnée
(ou r) par la coordonnée **r** :

$$\mathbf{r} = U \operatorname{tang} \chi. \tag{31-17}$$

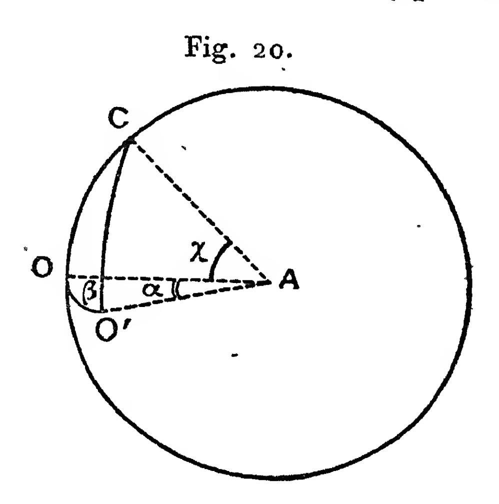
L'expression de l'élément de ligne d'Univers devient

$$ds^2 = -\frac{d\mathbf{r}^2}{(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)^2} - \frac{\mathbf{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}{1+\varepsilon\mathbf{r}^2} + c^2\, dt^2 \tag{32-17}$$

en posant $\varepsilon = \frac{1}{U^2}$.

surobservateur qui posséderait quatre dimensions
nivers d'Einstein apparaîtrait comme sphérique dans
ace quadridimensionnel euclidien (1) [l'expression
^{2} est euclidienne dans un hyperespace quadridimen-

Fig. 20.



s l'homme, qui ne possède que trois dimensions, n'a
ption directe de la courbure suivant une quatrième
espace; tout rayon lumineux lui arrivant dans l'espace
. dans cet espace que toutes choses lui apparaissent :
e, il fait réellement la projection conique qui vient
ée (2).

observateur en O déterminera la distance du point C
re de parallaxe, en s'imaginant que l'espace est eucli-
éplacera de O en un point O′, perpendiculairement
longueur extrêmement petite $OO' = a = U\alpha$, α étant
′; il mesurera l'angle $\beta = \widehat{OO'C}$ et croira que le
e C est $\varpi = \frac{\pi}{2} - \beta$, c'est-à-dire $\cos\beta$, puisque β est
petit. Or, dans le triangle sphérique OO′C, on a
$\alpha \cot\chi$, ou $\varpi = \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\chi}$; la distance $\mathbf{r}$ que l'observa-
de ϖ est donc

$$\mathbf{r} = \frac{a}{\varpi} = \frac{U \operatorname{tang}\alpha}{\alpha} \operatorname{tang}\chi = U \operatorname{tang}\chi.$$

projection sur l'espace euclidien tangent repré-

inuons à négliger les perturbations locales dues aux champs de
n'envisager que l'aspect d'ensemble.

l'aspect de l'Univers pour l'observateur; celui-ci a l'*illu-*
l' un espace euclidien infini.

erchons les équations du mouvement d'un point matériel
l'Univers d'Einstein ([1]) : les équations différentielles d'une
sique (n° 78) sont les suivantes :

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} = - \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}$$

$$\frac{d^2 x_\sigma}{c^2\, dt^2} = - \left[\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ 4 \end{matrix} \right\} \frac{dx_\sigma}{c\, dt} \right] \frac{dx_\alpha}{c\, dt} \frac{dx_\beta}{c\, dt},$$

. nous restreignant aux systèmes de référence dans lesquels
$_{\mu\nu}$ ne dépendent pas de $x_4 = ct$,

$$\text{)} \qquad \frac{d^2 x_\sigma}{c^2\, dt^2} = - \left\{ \begin{matrix} 44 \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{c\, dt} \frac{dx_\beta}{c\, dt} + 2 \left\{ \begin{matrix} \alpha 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{c\, dt} \frac{dx_\beta}{c\, dt}.$$

ec les coordonnées employées dans les équations (23-17) et
7), r ou $\chi \left(= \frac{r}{U}\right)$, θ, φ, ct, les symboles de Christoffel non
sont les suivants :

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = - U \sin\chi \cos\chi, \qquad \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\} = - U \sin\chi \cos\chi \sin^2\theta,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 31 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{U} \cot\chi,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\} = - \sin\theta \cos\theta, \qquad \left\{ \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 32 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \cot\theta.$$

us obtenons

$$7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 r}{c^2\, dt^2} &= U \sin\chi \cos\chi \left[\left(\frac{d\theta}{c\, dt} \right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{c\, dt} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2 \theta}{c^2\, dt^2} &= - \frac{2}{U} \cot\chi \frac{dr}{c\, dt} \frac{d\theta}{c\, dt} + \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{c\, dt} \right)^2, \\ \frac{d^2 \varphi}{c^2\, dt^2} &= - \frac{2}{U} \cot\chi \frac{dr}{c\, dt} \frac{d\varphi}{c\, dt} - 2 \cot\theta \frac{d\theta}{c\, dt} \frac{d\varphi}{c\, dt}. \end{aligned} \right.$$

us pouvons prendre $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$; les intégrales des aires

et de l'énergie sont alors

$$(35\text{-}17)\qquad \begin{cases} U^2 \sin^2\chi \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right) = h, \\[2mm] U^2 \sin^2\chi \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 = k, \end{cases}$$

h et k étant deux constantes d'intégration.

Éliminant dt, nous avons l'équation différentielle de l'orbite

$$(36\text{-}17)\qquad \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + U^2 \sin^2\chi = \frac{k}{h^2} U^4 \sin^4\chi$$

dont l'intégrale est

$$(37\text{-}17)\qquad \operatorname{tang}\chi \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{h}{k U^2 - h}.$$

C'est l'équation de la géodésique dans l'espace sphérique (ou elliptique). La seconde des formules (35-17) montre que le mobile suit cette géodésique avec la vitesse constante $\sqrt{k}$.

La vitesse de la lumière est c, ainsi qu'on le voit immédiatement en faisant $ds = 0$ dans l'équation (23-17).

Ces résultats correspondent au point de vue du surobservateur quadridimensionnel.

Mais tout autre est le point de vue de l'observateur tridimensionnel, qui projette le mobile sur l'espace euclidien tangent. Pour lui, la coordonnée distance est, non plus la coordonnée curviligne $r = U\chi$, mais la coordonnée rectiligne $\mathbf{r} = \operatorname{tang}\chi$. Adoptant maintenant la coordonnée $\mathbf{r}$, nous obtenons, en écrivant, comme plus haut, $\varepsilon = \frac{1}{U^2}$,

$$\frac{dr}{dt} = \cos^2\chi \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \cos^2\chi = \frac{1}{1 + \varepsilon \mathbf{r}^2}, \qquad \sin^2\chi = \frac{\varepsilon \mathbf{r}^2}{1 + \varepsilon \mathbf{r}^2}$$

et les formules (35-17) deviennent

$$(38\text{-}17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathbf{r}^2}{1 + \varepsilon \mathbf{r}^2} \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right) = h, \\[2mm] \dfrac{1}{(1 + \varepsilon \mathbf{r}^2)^2} \left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 + \dfrac{\mathbf{r}^2}{1 + \varepsilon \mathbf{r}^2} \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = k, \end{cases}$$

rente

$$(39\text{-}17)\qquad v_1^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 + \mathbf{r}^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = (1+\varepsilon\mathbf{r}^2)^2(k-\varepsilon h^2).$$

Tant que $\mathbf{r}$ est très petit, la vitesse observée est encore sensiblement $\sqrt{k}$ (εh^2 étant très petit), mais à mesure que χ approche de $\pm\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire à mesure que le mobile paraît à l'observateur s'éloigner *à l'infini*, toutes les vitesses apparentes croissent indéfiniment, quelque petites que soient les vitesses réelles $v=\sqrt{k}$ dans l'espace sphérique.

Dans la seconde des équations (38-17), remplaçons $\frac{d\varphi}{dt}$ par sa valeur $\frac{h(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)}{\mathbf{r}^2}$ tirée de la première équation; nous obtenons l'expression du carré de la vitesse radiale

$$(40\text{-}17)\qquad \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = (1+\varepsilon\mathbf{r}^2)^2\left(K - \frac{1+\varepsilon\mathbf{r}^2}{r^2}h^2\right).$$

Enfin l'équation (37-17) de la géodésique prend la forme

$$\mathbf{r}\cos(\varphi-\varphi_0) = \text{const.}$$

ce qui montre que, pour l'observateur, la trajectoire du mobile libre est une ligne droite.

Étudions particulièrement le cas de la lumière. Faisant $ds=0$ dans l'expression (32-17), nous obtenons

$$(41\text{-}17)\qquad \frac{1}{(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 + \frac{1}{1+\varepsilon\mathbf{r}^2}\mathbf{r}^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2.$$

Soient c_1 la vitesse de la lumière, α l'angle de la tangente au rayon lumineux et du rayon vecteur, on a, pour les composantes radiale et transversale de la vitesse,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = c_1\cos\alpha,\qquad \mathbf{r}\frac{d\varphi}{dt} = c_1\sin\alpha.$$

L'expression (41-17) s'écrit donc

$$\cos^2\alpha \qquad \sin^2\alpha$$

D'où l'on tire

$$c_1 = c \frac{1 + \varepsilon \mathbf{r}^2}{\sqrt{1 + \varepsilon \mathbf{r}^2 \sin^2 \alpha}}. \tag{42-17}$$

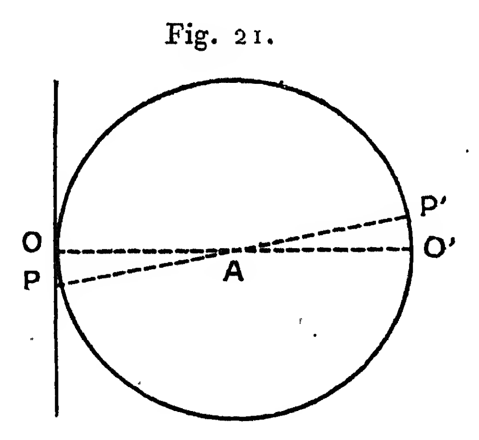
On pourrait aussi démontrer que l'équation du rayon lumineux est

$$\sin \alpha = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{r}} \qquad (\text{A étant une constante}),$$

c'est-à-dire que, pour l'observateur, la lumière se propage en ligne droite [1], mais avec une vitesse apparente c_1 d'autant plus grande que l'onde lumineuse est plus éloignée.

Les points de la région $\chi = \frac{\pi}{2}$ se projettent à l'infini ; par contre, les points tels que P' situés près du point antipode $O'(\chi = \pi)$ se projettent en P près de l'observateur [2]. Les astres en réalité les plus éloignés ($r = \pi U$) pourraient donner l'illusion d'astres rapprochés ; ils nous apparaîtraient à l'antipode de la position qu'ils occupaient, il y a des billions ou des trillions d'années peut-être,

Fig. 21.



lorsque la lumière en est partie. Mais nous avons dit que la lumière est probablement absorbée dans un si long parcours, et nous pouvons répéter ici les objections faites à l'hypothèse des anti-étoiles.

---

[1] Rappelons encore que nous supposons la matière uniformément répartie et que nous n'envisageons que l'aspect d'ensemble de l'Univers, en négligeant les perturbations locales.

[2] Ceci n'est exact que pour l'espace sphérique dont la projection couvre

110. Hypothèse de de Sitter [1]. La courbure du temps. L'Espace-Temps hyperbolique.

Étudions maintenant la solution de de Sitter (24-17, 26-17).

$$ds^2 = -U^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] + \cos^2\chi\, c^2\, dt^2, \tag{43-17}$$

$$\chi = \frac{r}{U}.$$

La différence avec la solution d'Einstein porte uniquement sur le dernier terme, g_{44} étant égal à $\cos^2\chi$ au lieu de 1 : il en résulte une profonde modification dans la conception de l'Univers.

La « coupe à temps constant » $dt = 0$ est, comme dans l'hypothèse d'Einstein, un espace sphérique (ou elliptique)

$$dl^2 = U^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{44-17}$$

mais il y a aussi une courbure du temps.

Une autre interprétation de l'équation (43-17) s'obtient en faisant le changement de coordonnées suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\chi = \sin\zeta \sin\omega, \\ &\operatorname{tang}\frac{\sqrt{-1}\, ct}{U} = \cos\zeta \operatorname{tang}\omega. \end{aligned}\right. \tag{45-17}$$

On obtient ainsi

$$ds^2 = -U^2\{d\omega^2 + \sin^2\omega[d\zeta^2 + \sin^2\zeta(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)]\}, \tag{46-17}$$

ce qui peut être interprété comme étant l'équation, en coordonnées sphériques (ω, ζ, θ, φ) d'une hypersphère de rayon U dans une multiplicité pseudo euclidienne à cinq dimensions. L'Espace-Temps quadridimensionnel qui limite l'hypersphère à cinq dimensions est l'analogue de l'espace tridimensionnel dans l'hypothèse d'Einstein, avec cette différence qu'une des coordonnées est imaginaire et qu'il ne faut chercher dans la formule (46-17) aucune représentation réelle.

En changeant l'azimut de ζ, on fait une opération correspondante à la rotation de l'axe du temps dans la théorie de Min-

(1) DE SITTER, *Monthly Notices*, novembre 1917.

kowski (n° 28). *Il n'y a plus de temps d'Univers absolu :* l'espace et le temps restent unis; à ce point de vue, le principe de relativité est mieux satisfait que dans l'hypothèse d'Einstein.

Si l'on veut garder des coordonnées réelles, la forme de l'Univers est celle d'un *hyperboloïde* dans une multiplicité à cinq dimensions.

Écrivons, en effet, $\omega = \sqrt{-1}\,\omega'$, $\zeta = \sqrt{-1}\,\zeta'$, nous obtenons

$$ds^2 = \mathrm{U}^2 \left\{ d\omega'^2 - \operatorname{sh}^2\omega' [d\zeta'^2 + \operatorname{sh}^2\zeta'(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \right\}.$$

Posons

$$\mathrm{r} = \mathrm{U} \operatorname{sh}\omega' \operatorname{sh}\zeta', \qquad z = \mathrm{r}\cos\psi,$$
$$x = \mathrm{r}\sin\psi\sin\varphi, \qquad \mathrm{t} = \mathrm{U}\operatorname{sh}\omega' \operatorname{ch}\zeta',$$
$$y = \mathrm{r}\sin\psi\cos\varphi, \qquad u = \mathrm{U}\operatorname{ch}\omega'.$$

L'expression de ds^2 devient

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - du^2 + d\mathrm{t}^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - \mathrm{t}^2 = \mathrm{U}^2,$$

ce qui est l'équation d'un hyperboloïde à une nappe dans la multiplicité à cinq dimensions x, y, z, u, t.

Les $g_{\mu\nu}$ de l'équation (46-17) vérifient les équations de la loi de la gravitation (22-17) sous les conditions

$$(47\text{-}17) \qquad \rho = 0, \qquad \lambda = \frac{3}{\mathrm{U}^2},$$

ρ étant la densité moyenne de la matière.

A première vue, la condition $\rho = 0$ peut paraître inadmissible, puisqu'il y a de la matière dans l'espace, et que l'espace (44-17) est fini. Voici l'interprétation : nous avons, en écrivant les équations (22-17), considéré l'aspect ultra-macroscopique, la forme d'ensemble de l'Univers, abstraction faite des condensations et irrégularités locales. Les conditions précédentes signifient que *l'Univers a une courbure naturelle qui n'est pas conditionnée par la matière mondiale. La matière intervient seulement pour modifier localement la courbure, sans changer la courbure d'ensemble et sans modifier le rayon* U. En d'autres termes : l'Espace-Temps a une existence et une forme d'ensemble indépendantes de la matière qu'il contient; cette matière vie r it

à être détruite, l'Espace-Temps subsisterait avec le même rayon; seules, les rides dues aux condensations locales disparaîtraient.

La différence avec la conception d'Einstein est radicale : dans l'hypothèse d'Einstein $\left(\varkappa\rho = 2\lambda,\ \lambda = \frac{1}{U^2}\right)$, c'est la matière mondiale qui détermine la courbure *moyenne* de l'espace (de l'espace seul, puisque le temps est rectiligne). L'hypothèse d'Einstein nécessite l'existence de quantités de matière de beaucoup supérieures à celles que nous connaissons (ce qui n'a, d'ailleurs, rien d'invraisemblable); l'hypothèse de de Sitter ne conduit plus du tout à cette nécessité.

Il convient d'insister sur la différence entre l'espace d'Einstein et celui de de Sitter, tous deux représentés par la même équation

$$dl^2 = U^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)];$$

l'espace d'Einstein a une courbure *moyenne* $R = \frac{6}{U^2} = 6\lambda$, mais cette courbure n'est pas la courbure 4λ dans le vide; la courbure moyenne n'est donc pas égale à la courbure de la majeure partie des régions de l'espace; presque partout, la courbure est seulement 4λ. Nous voyons ainsi que la matière, qui détermine la courbure de l'espace, intervient en produisant des sortes de plissements par lesquels la forme de l'espace est brusquement changée de distance en distance, de manière que l'espace se ferme en prenant une forme quasi-sphérique de courbure moyenne 6λ. Au contraire, dans l'hypothèse de de Sitter, nous avons une courbure moyenne $R = \frac{12}{U^2} = 4\lambda$, précisément égale à la courbure constante dans les régions vides de matière. L'espace n'est pas quasi-sphérique, il est bien sphérique (ou elliptique) avec seulement des rides locales, très disséminées, dues à la présence de matière, rides qu'on peut, si l'on cherche une image, comparer au relief du sol.

Conséquences de la courbure du temps. — Revenons à l'équation (43-17), la position de l'observateur étant prise pour origine des $r = U\chi$. Pour un point fixe dans l'espace, on a $d\chi = 0$, $d\theta = 0$, $d\varphi = 0$; la formule se réduit à

ou

$$d\tau = \cos\chi \, dt; \tag{48-17}$$

dt est l'intervalle de temps *mesuré* par l'observateur. Cet intervalle mesuré est d'autant plus grand par rapport à l'intervalle de temps propre $d\tau$ que $\cos\chi$ est plus petit : le temps qui s'écoule en un même point d'espace, entre deux événements, *paraît* donc à l'observateur d'autant plus long que la région qu'il observe est plus voisine de la zone $\chi = \frac{\pi}{2}$ à la distance $r = \frac{1}{2}\pi U$. *Dans la zone* $r = \frac{1}{2}\pi U$, *le temps est stationnaire pour l'observateur*, car dt est infiniment grand par rapport à ds.

Mais ceci n'est qu'un point de vue relatif à l'observateur et ne signifie pas que le cours du temps soit arrêté dans la zone $\chi = \frac{\pi}{2}$; si l'observateur se transportait dans ces régions, il trouverait, suivant l'expression d'Eddington, que la Nature y est aussi active que partout ailleurs, et c'est son ancienne demeure qui lui paraîtrait immobilisée dans un repos éternel.

Cette apparence est due à l'orthogonalité des temps propres aux deux endroits distants de $\frac{1}{2}\pi U$. Nous allons préciser l'influence de la courbure du temps en étudiant le mouvement d'un point matériel libre.

Comme précédemment, nous considérerons successivement les deux systèmes de coordonnées

$$r = U\chi, \quad \theta, \quad \varphi, \quad ct \qquad (r\text{, coordonnée curviligne})$$

et

$$\mathbf{r} = U \operatorname{tang}\chi, \quad \theta, \quad \varphi, \quad ct \qquad (\text{projection sur l'Univers tangent}).$$

Si nous adoptons le premier système, l'expression de ds^2 s'écrit, d'après (24-17) ou (43-17),

$$ds^2 = -dr^2 - U^2 \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) + \cos^2\chi \, c^2 \, dt^2. \tag{49-17}$$

Appliquant les équations du mouvement (33-17), calculant les symboles de Christoffel d'après les valeurs des $g_{\mu\nu}$ de (49-17), on trouve, pour les intégrales des aires et de l'énergie,

$$(50\text{-}17) \quad \left\{ U^2 \operatorname{tang}^2\chi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = h, \right.$$

en posant, comme précédemment, $\varepsilon = \frac{1}{U^2}$, et en choisissant les coordonnées de manière que $\theta = \frac{\pi}{2}$ et que $\frac{d\theta}{dt} = 0$. h et k sont des constantes d'intégration.

Le premier membre de la seconde équation est le carré de la vitesse. Nous trouvons un résultat très curieux : pour le surobservateur qui adopterait la coordonnée distance r, la vitesse d'un mobile libre ne reste pas constante. Près de l'observateur ($\chi = 0$), la vitesse est sensiblement $v = \sqrt{k}$, puis, à mesure que le mobile s'éloigne, χ augmente, et si la vitesse $v = \sqrt{k}$ est très petite par rapport à c (ce qui est toujours le cas pour les masses matérielles), le premier terme du second membre devient prépondérant; la vitesse croît jusque dans la région $\chi = \frac{\pi}{4}$, où elle devient, à peu de chose près, $\frac{c}{2}$. Ensuite, le mobile continuant à s'éloigner, sa vitesse décroît et tend vers zéro à mesure qu'il s'approche de la zone $\chi = \frac{\pi}{2}$ $\left(r = \frac{1}{2}\pi U\right)$: dans cette zone, tout est immobile.

La lumière elle-même est arrêtée dans la zone du temps stationnaire : reportons-nous, en effet, à l'expression (49-17) et faisons $ds = 0$ $\left(\text{avec } \theta = \frac{\pi}{2}, d\theta = 0\right)$, nous obtenons

$$(51\text{-}17) \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U^2 \sin^2\chi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \cos^2\chi\, c^2,$$

la vitesse de la lumière $c\cos\chi$, décroît progressivement de c à 0, lorsque χ augmente de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Nous pouvons imaginer qu'un surobservateur à quatre dimension d'espace, ayant la perception directe de la courbure de l'espace, utiliserait la coordonnée curviligne r; pour lui, la distance serait r et il mesurerait les vitesses que nous venons de calculer; il envisagerait l'Univers sous l'aspect fantastique que voici : la Nature lui paraîtrait avoir une activité de plus en plus grande à mesure que les régions observées seraient plus lointaines, jusqu'à la zone distante de $\frac{1}{4}\pi U$; dans cette zone, tous les mobiles (quelque petites que fussent leurs vitesses locales) auraient une vitesse colossale, au moins égale à $\frac{c}{2}$, mais ne pouvant en tous cas

jamais dépasser la vitesse apparente $\frac{c}{\sqrt{2}}$ de la lumière; puis, au delà, l'activité semblerait diminuer et tout mouvement s'éteindrait dans la zone $r = \frac{1}{2}\pi U$.

Pour l'homme tridimensionnel, qui ne connaît que la projection de l'Univers réel sur l'Univers tangent au point où il se trouve, l'aspect des choses est bien différent. Pour cet observateur, la distance d'un objet est $\mathbf{r} = U \operatorname{tang} \chi$; adoptons maintenant cette coordonnée, l'expression de ds^2 devient

$$ds^2 = \frac{d\mathbf{r}^2}{(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)^2} - \frac{\mathbf{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}{(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)} + \frac{c^2\, dt^2}{1+\varepsilon\mathbf{r}^2}. \tag{52-17}$$

On a

$$r = U\chi, \qquad \mathbf{r} = U \operatorname{tang}\chi, \qquad \frac{dr}{dt} = \cos^2\chi \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

de sorte que les équations (50-17) sont remplacées par les suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathbf{r}^2 \frac{d\varphi}{dt} = h, \\ & \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 + \mathbf{r}^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2 \varepsilon \mathbf{r}^2 + k. \end{aligned} \right. \tag{53-17}$$

Si un mobile, dont la vitesse est voisine de $\sqrt{k}$ près de l'origine, s'éloigne *à l'infini*, c'est-à-dire si χ tend vers $\frac{\pi}{2}$, sa vitesse mesurée croît indéfiniment.

Dans le cas de la lumière, $ds = 0$, on a donc

$$\left(\text{pour } \theta = \frac{\pi}{2}, \ \frac{d\theta}{dt} = 0\right), \qquad [\text{d'après } (52\text{-}17)],$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon\mathbf{r}^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 + \mathbf{r}^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2.$$

Soit α l'angle du rayon vecteur et de la tangente au rayon lumineux; on a

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = c_1 \cos\alpha, \qquad \mathbf{r}\frac{d\varphi}{dt} = c_1 \sin\alpha,$$

et l'expression précédente donne pour la vitesse *mesurée* c_1 de la lumière

$$c_1 = c\sqrt{\frac{1+\varepsilon\mathbf{r}^2}{1+\varepsilon\mathbf{r}^2\sin^2\alpha}}. \tag{55-17}$$

Or

$$\sin\alpha = \frac{\mathbf{r}}{c_1}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \frac{h}{c_1\mathbf{r}} \qquad \text{[d'après la première des équations (53-17)],}$$

remplaçant c_1 par sa valeur (55-17), on obtient la trajectoire du rayon lumineux (trajectoire repérée par l'observateur, qui s'imagine que le rayon est dans l'Univers tangent)

$$\sin\alpha = \frac{h}{\mathbf{r}\sqrt{c^2(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)-\varepsilon h^2}}. \tag{56-17}$$

A mesure que $\mathbf{r}$ augmente $\left(\text{c'est-à-dire que } \chi \text{ tend vers } \frac{\pi}{2}\right)$, α tend vers zéro, et la vitesse de la lumière devient infinie pour $\mathbf{r}$ infini.

La trajectoire du rayon lumineux n'est une ligne droite que dans le cas d'une propagation radiale, et pour une propagation radiale ($\alpha = 0$) la vitesse mesurée de la lumière est $c\sqrt{1+\varepsilon\mathbf{r}^2}$.

Imaginons maintenant qu'une onde lumineuse parte du lieu où se trouve l'observateur; sa vitesse (vitesse radiale) croît indéfiniment suivant la loi précédente; cependant, pour que la lumière parvienne à l'infini $\left(\text{zone } \chi = \frac{\pi}{2}\right)$, il faut un temps infini

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{U}}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\chi\, d\chi = \infty; \tag{57-17}$$

a fortiori, un mobile matériel demandera un temps infini pour atteindre la zone $\chi = \frac{\pi}{2}$.

Alors, plus d'anti-soleil, plus d'anti-étoiles, car dans la zone $\chi = \frac{\pi}{2}$ il y a la *barrière du temps* : pour l'observateur, jamais un mobile, jamais un rayon de lumière ne franchiront cette barrière, jamais ils ne reviendront. Et pourtant, si l'on pouvait mesurer la vitesse d'un mobile à mesure qu'il s'éloigne, on trouverait que cette vitesse croît indéfiniment. C'est bien, pour l'homme, l'illusion complète d'un Univers infini dans l'espace comme il est infini dans le temps.

111. L'effet Doppler.

L'hypothèse d'Einstein et celle de de Sitter conduisent à des résultats profondément différents pour l'effet Doppler.

Effet Doppler dans l'Univers d'Einstein. — Soit une source lumineuse possédant un mouvement dirigé radialement par rapport à l'observateur. La vitesse $v = \frac{dr}{dt}$ étant constante, ainsi que la vitesse c de la lumière, il n'y a aucune raison de trouver (en moyenne) pour les astres très lointains un effet Doppler d'un autre ordre de grandeur que pour les étoiles les plus voisines de notre système.

En raisonnant avec la coordonnée $\mathbf{r}$ (espace tangent) on arrive, bien entendu, à la même conclusion. Soient τ la période propre de la source, T la période apparente, v la vitesse $\frac{dr}{dt}$ de la source, v_1 sa vitesse apparente $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, c_1 la vitesse apparente de la lumière pour l'observateur. On a, comme dans la théorie donnée au n° 29,

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}}\left(1 \pm \frac{v_1}{c_1}\right); \tag{58-17}$$

or l'on a

$$v_1 = (1 + \varepsilon \mathbf{r}^2) v \qquad \text{[d'après (40-17) (où } h = 0)],$$
$$c_1 = (1 + \varepsilon \mathbf{r}^2) c \qquad \text{[d'après (42-17)]},$$

$\frac{v_1}{c_1} = \frac{v}{c}$. L'effet Doppler est le même quelle que soit la distance.

Effet Doppler dans l'Univers de de Sitter. — 1° Si la source était immobile par rapport à l'observateur, sa période apparente serait $\frac{\tau}{\cos\chi}$.

Le ralentissement apparent du temps à la distance $\mathbf{r} = \mathrm{U} \tan\chi$ (ou $r = \mathrm{U}\chi$) doit donc avoir pour effet un déplacement systématique des raies spectrales vers le rouge, d'autant plus grand que la source est plus éloignée.

2° Si la source est en mouvement, un effet Doppler proprement

dit doit se manifester à partir de la position de la raie déjà modifiée par la cause précédente.

Supposons un déplacement radial ($h = 0$) et adoptons la coordonnée $\mathbf{r}$ (la coordonnée r conduirait d'ailleurs au même résultat).

La formule de l'effet Doppler est

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c_1^2}}}\left(1 \pm \frac{v_1}{c_1}\right)$$

et l'on a

$$v_1^2 = c^2 \varepsilon \mathbf{r}^2 + k = c^2 \operatorname{tang}^2 \chi + k \qquad \text{[d'après (53-17)]},$$

$$c_1 = c\sqrt{1 + \varepsilon \mathbf{r}^2} = c\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \chi} \qquad \text{[d'après (55-17) où } \alpha = 0\text{]}.$$

D'où l'on déduit facilement

$$(59\text{-}17) \qquad T = \tau \frac{1}{\cos\chi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{c^2}}}\left(1 \pm \sqrt{\sin^2\chi + \frac{k}{c^2}\cos^2\chi}\right).$$

Pour la zone $\chi = \frac{\pi}{4}$, $\frac{k}{c^2}$ étant négligeable vis-à-vis de 1 et de $\sin^2\chi$, on aurait

$$T = \tau(\sqrt{2} \pm 1) = \begin{cases} 2{,}414\tau & \text{pour une source qui s'éloignerait,} \\ 0{,}414\tau & \text{pour une source qui se rapprocherait} \end{cases}$$

et pour la zone $\chi = \frac{\pi}{2}$ toutes les périodes apparentes deviendraient infinies.

Si l'hypothèse de de Sitter est conforme à la réalité, pour les astres les plus lointains que nous connaissions $\left(\text{qui n'ont certainement pas atteint la région } \chi = \frac{\pi}{4}\right)$, on doit s'attendre à trouver, en moyenne, un effet Doppler plus grand que pour les étoiles voisines de notre système, et si l'on admet que les vitesses radiales n'ont pas de préférence de sens, le ralentissement apparent du temps doit donner, en moyenne, un déplacement des raies vers le rouge.

Précisément, celles des nébuleuses spirales que les astronomes

en général, un effet Doppler considérable. Voici trois exemples :

Nébuleuse d'Andromède.......	— 311 km : sec	(rapprochement)
N. G. C. 1068................	+ 925 km : sec	(éloignement)
N. G. C. 4594................	+1185 km : sec	(éloignement)

Ces chiffres sont les vitesses radiales calculées d'après la formule habituelle $T = \tau\left(1 \pm \frac{v_R}{c}\right)$; elles sont beaucoup plus grandes que les vitesses observées pour les étoiles rapprochées. Il est bien possible que ces grandes valeurs de l'effet Doppler soient la manifestation de la courbure du temps, déjà sensible sur de si grandes distances.

Il semble bien aussi qu'il y ait, dans l'ensemble des observations, une prédominance des déplacements des raies vers le rouge. Si un tel déplacement systématique était établi avec certitude, par la moyenne d'un grand nombre d'observations, l'hypothèse de de Sitter devrait être préférée à celle d'Einstein. Pour le moment, il convient de rester dans l'expectative.

112. Les conditions à l'infini.

Dans l'Univers tangent, prenons des coordonnées cartésiennes rectangulaires

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbf{r} \sin\theta \sin\varphi, \\ X_2 &= \mathbf{r} \sin\theta \cos\varphi, \\ X_3 &= \mathbf{r} \cos\theta, \\ X_4 &= ct. \end{aligned}$$

Si l'on effectue cette transformation dans les formules

$$ds^2 = -\frac{d\mathbf{r}^2}{(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)^2} - \frac{\mathbf{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}{(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)} + c^2\, dt^2$$

(Univers d'Einstein),

$$ds^2 = -\frac{d\mathbf{r}^2}{(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)^2} - \frac{\mathbf{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}{(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)} + \frac{c^2\, dt^2}{(1+\varepsilon\mathbf{r}^2)}$$

(Univers de Sitter),

de l'observateur, les $g_{\mu\nu}$ ont les valeurs galiléennes

Galilée.

$$(60\text{-}17)\quad \left\{\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array}\right.$$

mais qu'à l'infini ($\mathbf{r} = \infty$), les $g_{\mu\nu}$ dégénèrent et prennent les valeurs suivantes :

Einstein.

$$(61\text{-}17)\quad \left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array}\right.$$

De Sitter.

$$(62\text{-}17)\quad \left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Est-ce là une objection à ces théories? Non, bien au contraire, le résultat est très satisfaisant, comme nous allons le montrer.

Les équations qui expriment la loi de la gravitation sont des équations aux dérivées partielles qui ne déterminent les $g_{\mu\nu}$ qu'à des fonctions près, et ces fonctions sont elles-mêmes déterminées par les conditions aux limites, c'est-à-dire par les conditions à l'infini (à l'infini pour l'observateur, $\mathbf{r} = \infty$).

Revenons, pour un instant, à la loi primitive d'Einstein ($\lambda = 0$) ; l'Espace-Temps est supposé euclidien à distance infinie de toute matière. Admettons que l'observateur puisse choisir un système de référence dans lequel, en coordonnées rectangulaires, les $g_{\mu\nu}$ aient, à l'infini, les valeurs galiléennes. Si maintenant l'observateur change de système de référence, en rapportant les événements à un système accéléré par rapport au premier, les valeurs limites des $g_{\mu\nu}$ ne restent pas invariantes. L'observateur peut donc distinguer les divers systèmes par les valeurs limites des $g_{\mu\nu}$, et les systèmes pour lesquels les $g_{\mu\nu}$ ont des valeurs galiléennes apparaissent comme plus remarquables que les autres, parce que les valeurs aux limites sont les plus simples.

Mais cette variabilité des conditions aux limites à distance infinie de toute matière est inadmissible, car dans l'espace vide et géométriquement homogène (euclidien), rien ne peut distinguer un système d'un autre. Il est nécessaire que les valeurs limites des $g_{\mu\nu}$ soient indépendantes du système de référence.

Cette condition d'invariance aux limites est la raison profonde pour laquelle Einstein a modifié la loi qu'il avait d'abord donnée : elle l'a conduit à introduire le terme $\lambda g_{\mu\nu}$ et à émettre l'hypothèse de l'espace fermé. Les considérations basées sur les propriétés du tenseur d'énergie électromagnétique n'ont été données que plus tard par Einstein.

On peut envisager la question sous un autre aspect. Il n'y a pas de différence essentielle entre la gravitation et l'inertie : leurs effets combinés se traduisent par l'existence du tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$. Nous savons qu'au voisinage d'une masse matérielle, les $g_{\mu\nu}$ sont légèrement modifiés, mais dans les valeurs *totales* des $g_{\mu\nu}$, doit-on faire la part de l'effet de la matière mondiale et de quelque chose qu'on pourrait appeler de *l'inertie pure?* cette dernière part serait donnée par les valeurs des $g_{\mu\nu}$ à l'infini.

Comme dit Einstein [1] : « Dans une théorie logique de la relativité, il ne peut y avoir une inertie relativement à l' « espace »; il n'y a qu'une inertie des masses par rapport aux autres masses. Si l'on éloignait une masse à distance infinie des autres masses, son inertie devrait s'annuler. »

D'après ce postulat de la *relativité de l'inertie*, les $g_{\mu\nu}$ doivent s'annuler à l'infini.

La solution de de Sitter (62-17) répond seule à cette condition, du moins d'une façon complète. C'est la relativité dans toute sa plénitude. Les valeurs limites des $g_{\mu\nu}$ sont nulles pour toutes les transformations.

Dans la solution d'Einstein (61-17) les valeurs limites des $g_{\mu\nu}$ sont invariantes pour toutes les transformations pour lesquelles (à l'infini) $t' = t$. Le système d'Einstein ne satisfait au postulat de la relativité que si ce postulat est appliqué à l'espace tridimensionnel; en d'autres termes : si nous concevons qu'un espace (x_1, x_2, x_3) avec de la matière mondiale soit en mouvement dans un espace absolu, ce mouvement ne peut pas être décelé; tous les mouvements observables sont relatifs à l'espace (x_1, x_2, x_3) avec sa matière mondiale, et non relatifs à l'espace absolu. La matière mondiale vient ainsi remplacer l'espace absolu de la théorie de

Newton et constitue un « système d'inertie ». La relativité de l'inertie n'est obtenue qu'en envisageant un « temps d'Univers absolu ». Quant au temps *mesuré*, il diffère plus ou moins de ce temps absolu, selon l'état de mouvement de l'observateur par rapport au système d'inertie.

113. L'accélération et la rotation.

Dès le début de la théorie de la relativité, nous avons insisté sur le fait que toute accélération semble posséder un caractère absolu. Alors qu'on ne peut pas mettre en évidence un mouvement de translation uniforme de la Terre dans l'espace, le compas gyroscopique permet de déterminer les pôles de la Terre, l'expérience de Foucault permet de mesurer sa rotation, et cette rotation est la même que celle qu'on observe d'après le mouvement apparent des étoiles.

L'explication est la suivante : les lignes d'Univers naturelles ou géodésiques ont une signification absolue dans l'Espace-Temps : elles sont déterminées par la structure géométrique de l'Univers. En tout point-événement d'Univers, il existe un Univers tangent, l'Univers euclidien de l'observateur en chute libre; dans un système de référence lié à cet observateur, ou dans un système en translation uniforme par rapport à lui, les géodésiques peuvent être à très peu près confondues avec des droites d'Univers dans une grande étendue. Le mouvement de translation uniforme n'a aucun caractère absolu parce qu'il conserve aux géodésiques leur forme rectiligne : il ne peut pas être déterminé par rapport aux géodésiques. Au contraire, toute accélération et en particulier toute rotation par rapport à ces lignes d'Univers a une réalité objective : c'est cette réalité qui est observée avec le pendule de Foucault dans le cas de la Terre.

« La vitesse, dit Eddington [1], c'est le rapport de certaines composantes de $T_{\mu\nu}$ deux à deux; elle n'existe que si T_{44} n'est pas nul. La matière (ou l'énergie électromagnétique) est donc la seule chose qui puisse avoir une vitesse par rapport au système de référence. La vitesse de la structure d'Univers c'est-à-dire des

régions où $T_{\mu\nu}$ s'annule, est de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Au contraire, l'accélération et la rotation sont définies au moyen des $g_{\mu\nu}$, elles existent partout où ceux-ci existent; la structure d'Univers a par suite une accélération et une rotation bien déterminées par rapport au système de référence. »

La structure d'Univers étant entièrement fixée par la matière mondiale, on peut dire encore que l'accélération et la rotation sont relatives à l'ensemble de cette matière, relatives au système que nous avons appelé plus haut *système d'inertie*.

On voit que l'accélération est une entité plus simple et d'un caractère bien plus universel que la vitesse; l'accélération peut être définie partout; la vitesse ne se rencontre que dans les régions où la présence de matière vient compliquer la structure.

114. La structure d'Univers et l'éther.

L'Univers possède une structure géométrique connexe de la présence de matière, puisque le champ de gravitation qui règne au voisinage de la matière n'est autre chose qu'une déformation de l'espace et du temps. Dans la matière (envisagée sous l'aspect macroscopique), la variation de courbure est proportionnelle à la densité ($R - R_0 = \varkappa\rho_0$); dans le vide, l'espace et le temps sont modifiés par le voisinage de la matière, bien que la courbure *totale* soit partout la même ($R = R_0$).

Si l'on cherche à préciser la relation qui doit exister entre la structure de l'Espace-Temps et la matière, deux points de vue opposés peuvent être envisagés.

1° On peut attribuer à la matière, ou plus exactement aux électrons qui la composent, un rôle primordial. Ce point de vue paraît conforme à la conception de l'Univers cylindrique d'Einstein. En effet, dans l'hypothèse d'Einstein, la courbure d'ensemble de l'Univers est déterminée par la quantité totale de matière existante [(30-17), n° 109]

$$U = \frac{\varkappa}{4\pi^2} M,$$

matière crée, en quelque sorte, l'espace qui la contient, et s'il n'y avait pas de matière, il n'y aurait pas d'Univers. L'influence de la matière est probablement plus compliquée qu'il ne semble à première vue d'après la formule précédente, car $\varkappa$ dépend sans doute de M.

2° Une autre théorie, soutenue par Eddington, est la suivante : « Je préfère, dit Eddington, regarder la matière et l'énergie, non pas comme des facteurs produisant les différents degrés de courbure de l'espace, mais comme des éléments de perception de cette courbure. »

Cette manière de voir est en accord avec la solution de de Sitter, puisque $\rho = 0$ signifie que la matière existante n'intervient en rien pour déterminer la courbure totale dans toute région vide, et n'influe pas sur la force d'ensemble, ni sur les dimensions de l'Univers. L'Univers a une courbure *naturelle;* la matière correspond, localement, à des sortes de montagnes ou de rides, mais dans son ensemble l'Univers est bien moins altéré par les irrégularités locales que ne l'est la Terre par le relief du sol. D'après cette théorie, on pourrait concevoir un Univers vide de matière.

Dans cette hypothèse de la courbure naturelle, les lois deviennent, conformément à la conception déjà indiquée (nos **83** et **103**), des identifications de grandeurs physiques avec des grandeurs géométriques et l'on peut les considérer comme des définitions des grandeurs physiques (Eddington).

Si la courbure totale est R_0 $\left(R_0 = \frac{12}{U^2}\right)$ et si, de plus, le tenseur $R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R_0 g_{\mu\nu}$ est nul, *nous disons qu'il y a le vide;* cette structure se manifeste à nous sous un aspect particulier que nous appelons *le vide :* c'est une définition du vide. Si maintenant la courbure totale est R_0, mais si $R_{\mu\nu}$ n'est plus égal à $\frac{1}{4} R_0 g_{\mu\nu}$, nous disons qu'il y a de l'énergie libre (énergie électromagnétique); enfin, si dans une région la courbure totale R est différente de la courbure R_0 du vide, nous sommes en présence d'une structure géométrique que nos sens distinguent des autres structures et nous exprimons nos sensations en disant que la région considérée est remplie de matière; le scalaire géométrique $\frac{1}{\varkappa}(R - R_0)$ est une

grandeur qui s'identifie avec la grandeur physique que nous appelons la *densité propre* ρ_0.

« *La matière est un indice, dit Eddington, et non une cause*.... La matière et le mouvement sont des aspects de la courbure d'Univers.... La loi de gravitation (la loi dans le vide) n'est pas une loi, si l'on entend par ce mot une limitation de la manière dont peut se comporter le substratum universel; ce n'est simplement qu'une définition du vide. Nous n'avons pas besoin de considérer la matière comme une entité étrangère, cause de perturbations dans le champ de gravitation; la perturbation, c'est la matière elle-même. »

Le rôle primordial est donc attribué à l'Espace-Temps, dont les divers états de structure nous apparaissent sous des aspects que nos sens distinguent les uns des autres, et auxquels nous avons donné les noms de *vide*, *rayonnement*, *matière*.

Cette manière de voir est très séduisante par sa logique et sa simplicité.

C'est un retour à l'hypothèse d'un « substratum universel », de l'éther par conséquent, mais combien cet éther est différent de celui des anciennes théories!

On avait admis autrefois que l'espace était rempli d'un milieu qui propageait la lumière par déformations élastiques, comme la matière propage le son. On avait été conduit à attribuer à l'éther des propriétés quasi matérielles. Cependant personne ne réussit à imaginer, avec un tel éther, un modèle mécanique capable de fournir une interprétation satisfaisante des lois du champ électromagnétique. Comme dit Einstein [1], « les lois étaient claires et simples, les interprétations mécaniques lourdes et contradictoires ».

Avec Hertz, la matière apparaît non seulement comme substratum des propriétés mécaniques, mais comme substratum de champs électromagnétiques. Mais les champs électromagnétiques se manifestant aussi dans le vide, l'éther lui aussi apparaît comme substratum de champs électromagnétiques. Il n'y a plus guère de distinction entre la matière et l'éther, doués tous deux à la fois de propriétés mécaniques et de propriétés électromagnétiques.

---

[1] A. Einstein, *L'éther et la théorie de la relativité*. Traduction française

Lorentz réalisa un progrès considérable en « dépouillant l'éther de ses propriétés mécaniques et la matière de ses propriétés électromagnétiques. Non seulement dans l'espace vide, mais aussi à l'intérieur de la matière, l'éther seul est le siège des champs électromagnétiques » (Einstein). Les particules élémentaires qui composent la matière sont seules capables de se mouvoir; leurs mouvements constituent les courants de convection. Lorentz réussit à représenter toute action électromagnétique par les équations des champs dans le vide, établies par Maxwell, en ajoutant simplement le courant de convection au courant de déplacement (n° 38, éq. 21-8).

On peut dire, avec Einstein, que l'immobilité est la seule propriété mécanique que Lorentz ait laissée à l'éther.

La théorie de la relativité restreinte a enlevé à l'éther cette dernière propriété. Si l'éther immobile existe, un système de référence qui lui est lié n'a aucune propriété particulière, ne se distingue en rien d'un autre système en mouvement non accéléré. L'éther n'a donc plus aucune propriété mécanique. L'hypothèse de son existence n'est pas nécessaire, car on peut admettre que les champs électromagnétiques ne représentent pas l'état d'un milieu substantiel, qu'ils sont des réalités irréductibles à quelque chose de plus simple, réalités qui ne sont liées à aucun substratum, de même que les électrons. Comme la matière, en effet, le rayonnement est doué de quantité de mouvement et transporte de l'énergie.

Mais ceci est le point de vue de la relativité *restreinte :* la relativité généralisée nous montre que, dans la négation absolue de l'existence de l'éther, il y a un danger : celui de faire croire que l'espace vide est dénué de toute propriété physique. Tant que le principe de relativité avait été restreint au mouvement de translation uniforme, on pouvait le penser ; cependant la réalité de l'accélération et de la rotation n'est pas d'accord avec cette conception, et la relativité généralisée établit nettement que l'*espace vide de matière n'est pas amorphe*. La théorie de la relativité ramène la mécanique et la physique à la géométrie riemannienne, et prouve que l'Univers possède des propriétés métriques en relation avec la matière présente ou la matière avoisinante. Ces propriétés sont

dix potentiels $g_{\mu\nu}$ de gravitation et aussi, comme nous le verrons bientôt, par les valeurs des quatre potentiels φ_{μ} du champ électromagnétique.

On doit donc, aussi bien dans l'hypothèse cosmologique d'Einstein que dans celle de de Sitter, écarter la conception que l'espace serait physiquement vide, au sens du néant absolu ; il faut, non pas supprimer l'éther, mais donner une forme nouvelle à la notion du substratum universel : l'éther de la relativité n'a rien de commun avec l'éther de la théorie de Fresnel ([1]) : c'est « un milieu privé de toutes les propriétés mécaniques et cinématiques, mais qui détermine les phénomènes mécaniques et électromagnétiques » (Einstein).

D'après les idées actuelles d'Einstein, l'éther « détermine les relations métriques dans le continuum spatio-temporel, par exemple les possibilités de configuration des corps solides aussi bien que les champs de gravitation ; mais nous ne savons pas s'il joue un role essentiel dans la formation des particules élémentaires de l'électricité qui constituent la matière ».

Cependant, les deux extensions successives de la théorie d'Einstein, dues à Weyl et à Eddington (dont nous parlerons au Chapitre suivant), paraissent apporter une réponse à cette dernière question, celle de la formation des électrons. Grâce à l'union, en une géométrie unique, du champ de gravitation et du champ électromagnétique, on conçoit que l'électron puisse être un état particulier de la structure d'Univers, de l'éther au sens qu'on doit attribuer aujourd'hui à ce mot.

En résumé, l'espace possède des propriétés physiques, et l'on peut exprimer ce fait en disant qu'un « éther » existe. Mais « cet éther ne doit pas être conçu comme étant doué de la propriété qui caractérise les milieux pondérables, c'est-à-dire comme constitué de parties pouvant être suivies dans le temps : la notion de mouvement ne doit pas lui être appliquée » (Einstein).

On peut dire encore que l'éther est incapable de créer une division de l'Univers en espace et en temps (Eddington).

([1]) Il serait préférable, pour éviter toute confusion, de le désigner par un autre nom. Le mot *éther* évoque trop l'idée des anciennes théories.

CHAPITRE XVIII.

UNION DU CHAMP DE GRAVITATION ET DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE. GÉOMÉTRIES DE WEYL ET D'EDDINGTON.

115. Généralisation de la théorie d'Einstein.

L'existence des phénomènes électromagnétiques et les lois qui les régissent s'accordent parfaitement avec la théorie de la relativité; cette théorie a même pour origine la théorie de Maxwell dont elle est la suite nécessaire (n° 16). Cependant, dans ce qui précède, le champ de gravitation et le champ électromagnétique sont complètement séparés en ce sens que l'électricité n'est pas rattachée à une propriété *géométrique* de la structure d'Univers, cette structure étant entièrement représentée par les dix potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$. La loi de la gravitation, aux points où se trouve de l'énergie électromagnétique, s'exprime bien par l'égalité d'un tenseur de courbure et du tenseur d'énergie électromagnétique, mais il n'en reste pas moins vrai que ce sont toujours les valeurs des potentiels $g_{\mu\nu}$ qui expriment seules explicitement les propriétés géométriques de l'Espace-Temps.

Ce serait un grand progrès si l'on pouvait unir, dans une même géométrie, le champ de gravitation et le champ électromagnétique. Cette fusion a été réalisée par H. Weyl [1].

Avant d'aborder les développements mathématiques, nous donnerons une vue d'ensemble des idées qui conduisent à la généralisation de la théorie d'Einstein.

Procédant suivant la méthode qui a été si féconde dans le déve-

(1) *Berlin. Sitzungsberichte*, 30 mai 1918; *Ann. d. Physik*, t. LIX, 1919, p. 101; *Raum, Zeit, Materie* (1921).

loppement progressif de la théorie de la relativité : *suppression des axiomes et des restrictions non nécessaires*, nous devons nous demander si nous n'aurions pas conservé jusqu'à présent une restriction que la raison n'impose pas *a priori*.

Effectivement, nous avons laissé subsister une hypothèse arbitraire : nous avons admis qu'on peut toujours, en des points d'Univers différents, employer *la même unité* de mesure pour la comparaison des intervalles. A première vue, il ne paraît pas y avoir d'objection ; en un point d'Univers A, nous définissons une unité de longueur en choisissant une règle étalon, règle qui peut aussi servir pour la mesure optique du temps si nous prenons comme unité naturelle la vitesse de la lumière ; il semble donc qu'en transportant en un autre point d'Univers B une copie exacte de l'étalon choisi en A on puisse, en B, mesurer les intervalles élémentaires et faire la comparaison avec les intervalles mesurés en A. Sans doute, nous pouvons opérer de la sorte *si deux copies exactes de l'étalon, transportées de A en B par des chemins différents, sont toujours identiques au point* B : c'est ce que nous avons implicitement admis ; peu importe d'ailleurs de savoir si l'unité ainsi définie en B est réellement *la même* qu'en A — comme dit Eddington, c'est une question de pure métaphysique — ce qui nous intéresse, c'est de savoir si nous pouvons obtenir *sans ambiguïté* en B une longueur que nous considérerons, par définition, comme représentant la même unité qu'au point A.

Cependant, rien ne prouve, *a priori*, que deux copies exactes de l'étalon choisi au point A, transportées en B par des voies différentes et avec des orientations différentes, soient identiques en B ; en d'autres termes, rien ne prouve que la longueur soit intégrable. Il y a donc là une restriction qu'il faut supprimer.

Nous avons montré que le champ de gravitation correspond à la non-intégrabilité de la direction (n° 74) ; de même la non-intégrabilité de la longueur doit caractériser un champ d'une autre nature : ne serait-ce pas le champ électromagnétique ?

Si nous abandonnons l'hypothèse de l'intégrabilité de la longueur, il devient impossible de définir une unité valable en tous les points d'Univers ; il faut définir une unité, un étalon exact *en chaque point* de l'Espace-Temps ; nous appellerons *jauge* l'unité d'intervalle choisie en chaque point d'Univers. De même

que le système de coordonnées est arbitraire, le système de jauges est arbitraire; il faut, dans le cas le plus général, diviser l'Univers en cellules quadridimensionnelles par un système quelconque de coordonnées, et dans chaque cellule infiniment petite adopter une jauge. Les jauges sont seulement soumises à la condition qu'en deux cellules infiniment voisines les jauges soient infiniment peu différentes, ce qui est possible car l'ambiguïté disparaît à la limite pour un déplacement infiniment petit. Dans la théorie primitive, où les jauges étaient supposées les mêmes partout, dix mesures d'intervalles ds autour d'un point permettaient de déterminer les dix potentiels $g_{\mu\nu}$ correspondant au système de coordonnées employé, c'est-à-dire permettaient de décrire le champ de gravitation; dans la théorie plus générale, quatorze mesures vont être nécessaires, comme nous allons le montrer, pour déterminer les dix $g_{\mu\nu}$ et quatre « potentiels » supplémentaires qui paraissent bien correspondre aux composantes du quadrivecteur potentiel électromagnétique.

Ce sont les quatorze potentiels $g_{\mu\nu}$ et φ_μ qui définissent la géométrie du système de coordonnées et du système de jauges choisis, et qui contiennent en eux la structure de l'Espace-Temps.

116. La géométrie de Weyl.

Faisons décrire à un vecteur A_μ, *par déplacement parallèle*, un contour fermé infiniment petit, limitant l'élément de surface $dS^{\nu\sigma}$; d'après (7-14) sa variation est [1]

$$dA_\mu = \frac{1}{2} B^{\varepsilon}_{\mu.\nu\sigma} A_\varepsilon \, dS^{\nu\sigma} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\sigma\rho} A^\rho \, dS^{\nu\sigma}. \tag{1-18}$$

Comme $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ est symétrique gauche par rapport à μ et ρ (n° 73), nous avons

$$A^\mu \, dA_\mu = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma\rho} A^\mu A^\rho \, dS^{\nu\sigma} = 0,$$

ce qui prouve que dA_μ est orthogonal à A_μ; *la longueur généra-*

---

(1) Le facteur $\frac{1}{2}$ est introduit à cause de la sommation qui fait écrire deux fois chacune des composantes du tenseur $dS^{\nu\sigma}$; on a en effet $dS^{\nu\sigma} = -dS^{\sigma\nu}$ et $R_{\mu\nu\sigma\rho} A^\rho \, dS^{\nu\sigma} = R_{\mu\sigma\nu\rho} A^\rho \, dS^{\sigma\nu}$.

lisée du vecteur n'a donc pas changé (n° 67); *sa direction seule a varié*. Ainsi la restriction admise *a priori* dans la géométrie d'Einstein est que, par déplacement parallèle (c'est-à-dire tel que $A_{\mu\nu} = 0$ le long du parcours), la longueur généralisée d'un vecteur A_μ se conserve toujours, alors que la direction de ce vecteur change lorsque l'Espace-Temps n'est pas euclidien ($R_{\mu\nu\sigma\rho} \neq 0$).

Supprimons cette restriction : il faut remplacer $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ par un tenseur d'un type plus général $^*R_{\mu\nu\sigma\rho}$. Ce tenseur peut être décomposé en une somme de deux tenseurs $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ et $F_{\mu\nu\sigma\rho}$, le premier symétrique gauche, le second symétrique en μ et ρ : il suffit en effet de poser

$$(2\text{-}18)\quad \begin{cases} B_{\mu\nu\sigma\rho} = \dfrac{1}{2}(^*R_{\mu\nu\sigma\rho} - {}^*R_{\rho\nu\sigma\mu}) & \text{(symétrique gauche en } \mu \text{ et } \rho\text{)}, \\ F_{\mu\nu\sigma\rho} = \dfrac{1}{2}(^*R_{\mu\nu\sigma\rho} + {}^*R_{\rho\nu\sigma\mu}) & \text{(symétrique en } \mu \text{ et } \rho\text{)}. \end{cases}$$

On peut donc écrire au lieu de (1-18)

$$(3\text{-}18)\qquad dA_\mu = \frac{1}{2}\,{}^*R_{\mu\nu\sigma\rho}A^\rho\,dS^{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(B_{\mu\nu\sigma\rho} + F_{\mu\nu\sigma\rho})A^\rho\,dS^{\nu\sigma}.$$

La variation devant être annulée quand le circuit est décrit une seconde fois, mais en sens inverse du premier parcours, le tenseur $^*R_{\mu\nu\sigma\rho}$ et par suite les tenseurs $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ et $F_{\mu\nu\sigma\rho}$ doivent être symétriques gauches en ν et σ.

Soit l la longueur généralisée de A_μ, on a

$$\begin{aligned}(l + dl)^2 &= (A_\mu + dA_\mu)(A^\mu + dA^\mu) \\ &= A_\mu A^\mu + A^\mu\,dA_\mu + A_\mu\,dA^\mu \\ &= l^2 + 2A^\mu\,dA_\mu\end{aligned}$$

ou, d'après (3-18),

$$(4\text{-}18)\qquad 2l\,dl = {}^*R_{\mu\nu\sigma\rho}A^\mu A^\rho\,dS^{\nu\sigma} = F_{\mu\nu\sigma\rho}A^\mu A^\rho\,dS^{\nu\sigma},$$

car $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ étant symétrique gauche en μ et ρ,

$$B_{\mu\nu\sigma\rho}A^\mu A^\rho\,dS^{\nu\sigma} = 0.$$

Ici, Weyl a adopté une limitation. Il a supposé :

1° Que $F_{\mu\nu\sigma\rho}$ est décomposable en un produit $g_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}$;

2° Que $F_{\nu\sigma}$ est le rotationnel d'un vecteur.

D'après la première condition, (4-18) devient

$$2\, l\, dl = F_{\nu\sigma}(g_{\mu\rho} A^{\mu} A^{\rho})\, dS^{\nu\sigma} = F_{\nu\sigma}\, l^2\, dS^{\nu\sigma},$$

$$\frac{dl}{l} = \frac{1}{2} F_{\nu\sigma}\, dS^{\nu\sigma}, \tag{5-18}$$

la variation de longueur est donc proportionnelle à la longueur et indépendante de la direction du vecteur.

La variation d'un vecteur qui décrit un contour fermé devant être déterminée par le contour lui-même, les différentes surfaces limitées par ce contour doivent conduire à une même valeur de δA_{μ}; l'intégrale de surface doit alors porter sur un rotationnel, d'où la seconde condition de Weyl.

La raison de la limitation de Weyl est la suivante. Supposons qu'un vecteur nul soit transporté de A à B. D'après (5-18) sa longueur reste nulle quel que soit le chemin suivi; la longueur nulle est donc quelque chose d'absolu, et une perturbation lumineuse a une trajectoire bien définie, celle dont l'intervalle est constamment nul. Au contraire, d'après la formule générale (4-18), il n'existe pas de moyen unique permettant de définir en B un intervalle nul, et l'on se demande comment se propagera une perturbation lumineuse émise en B.

Soit une règle extrêmement courte, de longueur généralisée l; déplaçons-la de quantités infiniment petites dx_1, dx_2, dx_3, dx_4; puisque $F_{\nu\sigma}$ est le rotationnel d'un vecteur, nous pouvons écrire

$$\frac{dl}{l} = \varphi_1\, dx_1 + \varphi_2\, dx_2 + \varphi_3\, dx_3 + \varphi_4\, dx_4 = \varphi_{\mu}\, dx_{\mu}. \tag{6-18}$$

Les φ_{μ} étant quatre fonctions de point, composantes d'un vecteur d'Univers, *qui ne sont déterminées qu'à des fonctions φ'_{μ} près, telles que $\varphi'_{\mu}\, dx_{\mu}$ soit une différentielle totale.*

Il est vrai que $\frac{dl}{l}$ doit dépendre de l'ordre dans lequel on effectue les déplacements, mais cette variation avec l'ordre des déplacements est infiniment petite par rapport à $\frac{dl}{l}$, parce que l'ambiguïté provenant de la différence entre deux règles, primitivement identiques en un point, transportées par des chemins différents en un autre point, doit disparaître à la limite quand les positions initiale et finale sont infiniment voisines et les chemins suivis infiniment petits.

Cette expression (6-18) de $\frac{dl}{l}$ est analogue à l'expression de ds^2, mais c'est une forme linéaire au lieu d'une forme quadratique avec quatre fonctions φ_μ au lieu des dix fonctions $g_{\mu\nu}$.

Nous raisonnerons pour les φ_μ comme pour les $g_{\mu\nu}$; les $g_{\mu\nu}$ dépendent de la structure de l'Espace-Temps et du système de coordonnées; les φ_μ dépendent aussi d'une propriété intrinsèque de l'Espace-Temps et du système de jauges employé. De même que les $g_{\mu\nu}$ ne peuvent pas prendre des valeurs complètement arbitraires par un choix convenable de coordonnées (c'est ce qu'exprime la loi de la gravitation), de même les φ_μ doivent remplir une condition bien déterminée — doivent obéir à une loi — puisque ces potentiels dépendent d'une propriété intrinsèque de l'Univers qui reste inaltérée par un changement du système de jauges.

D'après (6-18) nous avons par intégration

$$\text{(7-18)} \qquad \operatorname{Log} \frac{l}{l_0} = \int_A^B \varphi_1\, dx_1 + \varphi_2\, dx_2 + \varphi_3\, dx_3 + \varphi_4\, dx_4.$$

La longueur l, après un parcours entre A et B, sera indépendante du chemin suivi si

$$\varphi_1\, dx_1 + \varphi_2\, dx_2 + \varphi_3\, dx_3 + \varphi_4\, dx_4$$

est une différentielle totale; c'est-à-dire si le rotationnel des φ_μ est nul

$$\text{(8-18)} \qquad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad \text{ou} \qquad F_{\mu\nu} = 0 \ (\text{et } F_{\mu\nu\sigma\rho} = 0).$$

Faisons maintenant l'hypothèse que les φ_μ représentent le quadrivecteur potentiel électromagnétique; l'annulation du rotationnel exprime, d'après le premier groupe des équations de Maxwell généralisées (17-15), que les forces électriques et magnétiques $F_{\mu\nu}$ sont nulles : la condition d'intégrabilité de la longueur ou la condition pour qu'on puisse comparer directement deux intervalles en deux points éloignés A et B est donc qu'on puisse passer de A à B sans rencontrer de champ électromagnétique. Si cette condition est réalisée, la géométrie précédemment exposée est suffisante : la structure de l'Espace-Temps est exprimée par les $g_{\mu\nu}$. S'il y a champ électromagnétique, cette structure est exprimée par quatorze potentiels : les dix $g_{\mu\nu}$ qui décrivent les

propriétés gravifiques et les quatre φ_μ qui décrivent les propriétés électromagnétiques.

La loi à laquelle doivent obéir les φ_μ est toute trouvée : c'est la loi du champ électromagnétique exprimée sous forme tensorielle par la généralisation des équations de Maxwell (17-15). L'union de cette loi et de la loi de la gravitation constitue la loi générale de la structure d'Univers; la géométrie des $g_{\mu\nu}$ et celle des φ_μ sont maintenant unies en une seule et même géométrie.

Puisque les φ_μ ne sont déterminés qu'à des fonctions φ'_μ près, telles que $\varphi'_\mu \, dx_\mu$ soit une différentielle totale, on peut ajouter au second membre de (7-18) une fonction de point complètement arbitraire, ce qui exprime précisément l'indétermination du système de jauges. Quant au rotationnel $F_{\mu\nu}$, il reste le même malgré cette indétermination puisque les $\frac{\partial \varphi'_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi'_\nu}{\partial x_\mu}$ sont nuls : cela signifie que *les forces électriques et magnétiques sont indépendantes du système de jauges.*

Nous avons montré que la quadruple indétermination des coordonnées x_μ conduit nécessairement à quatre identités, d'où résulte la conservation de l'impulsion-énergie. De même, l'indétermination du système de jauges doit avoir pour conséquence une loi supplémentaire de conservation; nous connaissons cette loi : elle exprime la conservation de l'électricité (nº 99).

Ainsi, il est tout à fait raisonnable de penser que la non-intégrabilité des longueurs est caractéristique du champ électromagnétique, car précisément la suppression de la restriction illogique qui avait été conservée nous donne les quatre quantités dont nous avons besoin pour définir complètement l'état de l'Espace-Temps en chaque point. Il est difficile de ne voir qu'une coïncidence dans un pareil résultat.

Mais Weyl a encore conservé une restriction, puisqu'il a admis que la variation de la longueur (généralisée) ne dépend que du parcours suivi et qu'elle est indépendante de la manière dont a été fait le transport sur un même parcours. Nous avons dit qu'il a cru cette condition nécessaire parce que sa suppression soulevait une grosse difficulté pour attribuer à la lumière une trajectoire définie.

Eddington a fait tomber la restriction de Weyl, la dernière qui

subsistait. Dans la théorie d'Eddington, l'Univers n'est assujetti qu'à la condition, évidemment nécessaire, de posséder une structure géométrique; il paraît impossible de réduire davantage les hypothèses : c'est le moins qu'on puisse supposer.

117. Théorie géométrique de l'Univers (Eddington).

Prendre un système de coordonnées signifie choisir quatre familles d'espaces pour diviser en cellules l'Univers quadridimensionnel; dans chacune de ces familles, chaque espace peut être caractérisé par un nombre (c'est, en somme, faire un numérotage). Il résulte de là qu'*un déplacement* dx_μ *est un exemple simple de vecteur absolu*, car les différences de coordonnées s'expriment par des *nombres purs*, indépendants de tout système de jauges.

Soit A^μ un vecteur *absolu* représentant un déplacement infiniment petit au point d'Univers P. Si nous voulons que l'Univers ait une structure géométrique, il faut admettre qu'en un point P' infiniment voisin de P nous pouvons trouver un déplacement équivalent à A^μ; ce déplacement n'est pas A^μ, car (comme au n° 70) il faut tenir compte d'une pseudo-variation de A^μ attribuable au caractère curviligne des coordonnées, même si le vecteur est déplacé « sans variation absolue » ou « par déplacement parallèle ». Pour un déplacement dx_ν infiniment petit du vecteur A^μ, la pseudo-variation peut être limitée à une expression linéaire, parce que A^μ et dx_ν sont infiniment petits. Dans la théorie d'Einstein, cette pseudo-variation a pour expression (n° 70)

$$-\left\{ \begin{matrix} \nu\alpha \\ \mu \end{matrix} \right\} A^\alpha.$$

Ici, le symbole de Christoffel doit être remplacé par une fonction à trois indices que nous préciserons plus loin, et que nous désignerons par $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$; cette fonction n'est pas nécessairement un tenseur. La pseudo-variation s'écrit

$$-\Gamma^\mu_{\nu\alpha} A^\alpha, \qquad (9\text{-}18)$$

et, par déplacement parallèle, on a

$$dA^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} A^{\alpha}\, dx_{\nu} = 0. \tag{10-18}$$

P′ P′₁

dx_ν

P dx_α P₁

A^α étant un déplacement infiniment petit $PP_1 = dx_\alpha$, qui par déplacement parallèle devient $P'P'_1$, la condition pour qu'on arrive au même point P'_1 en interchangeant les deux déplacements dx_α, dx_ν est

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}.$$

La symétrie en ν et α de $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ est la condition pour que la géométrie soit « affine »; elle exprime que l'Univers possède en chaque point un Univers euclidien tangent.

Le tenseur de Riemann-Christoffel généralisé. — Faisons maintenant décrire au vecteur A^μ un circuit fermé très petit, par déplacement parallèle; nous pouvons répéter identiquement les calculs du n° **74**, en remplaçant les symboles de Christoffel par les Γ, et nous obtenons, au lieu de (5-14),

$$\delta A^{\mu} = \frac{1}{2} \int\int {}^*R^{\mu}_{\rho\nu\sigma} A^{\rho}\, dS^{\nu\sigma}, \tag{11-18}$$

en posant

$${}^*R^{\mu}_{\rho\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}. \tag{12-18}$$

L'aire à laquelle s'étend l'intégrale double doit être très petite, car le vecteur A^μ n'est défini que sur le contour; toute ambiguïté est évitée si l'aire est infiniment petite et l'on a

$$dA^{\mu} = \frac{1}{2}\, {}^*R^{\mu}_{\rho\nu\sigma} A^{\rho}\, dS^{\nu\sigma}, \tag{13-18}$$

dA^μ est un vecteur, car c'est la variation de A^μ quand on est revenu au point de départ, A^ρ est un vecteur,

$$dS^{\nu\sigma} (= - dS^{\nu\sigma} = dx_\nu\, dx_\sigma)$$

est un tenseur, par conséquent ${}^*R^{\mu}_{\rho\nu\sigma}$ est un tenseur, et c'est un

tenseur absolu, car nous n'avons eu à faire intervenir aucun système de jauges.

Ce tenseur est la généralisation du tenseur de Riemann-Christoffel, les symboles de Christoffel étant remplacés par les Γ.

Contractons ${}^*R^{\mu}_{\rho\nu\sigma}$, nous obtenons la généralisation du tenseur $R_{\rho\nu}$

$$(14\text{-}18)\qquad {}^*R_{\rho\nu} = {}^*R^{\sigma}_{\rho\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}.$$

Ces deux tenseurs absolus ${}^*R^{\mu}_{\rho\nu\sigma}$ *et* ${}^*R_{\rho\nu}$ *traduisent les propriétés intrinsèques du continuum. On n'en voit pas d'autres qui jouissent des mêmes propriétés.*

Pour introduire les $g_{\mu\nu}$, il nous faut adopter un système de jauges quelconque, mais défini. Nous définissons la longueur l d'un déplacement A^{μ} par

$$(15\text{-}18)\qquad l^2 = g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu},$$

l^2 est un invariant à l'égard du système de coordonnées; $g_{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique.

Un système de coordonnées étant adopté, les A^{μ} sont des nombres purs, mais l^2 dépend, par les $g_{\mu\nu}$, du système de jauges. La longueur n'est donc pas un invariant *absolu*; c'est une convention purement géométrique et non une notion physique.

Imprimons à A^{μ} un déplacement parallèle le long de dx_σ, nous avons

$$(16\text{-}18)\qquad d(l^2) = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}A^{\mu}A^{\nu} + g_{\mu\nu}A^{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_\sigma} + g_{\mu\nu}A^{\mu}\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_\sigma}\right)dx_\sigma$$
$$= \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} - g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\right)A^{\mu}A^{\nu}\,dx_\sigma \quad [\text{d'après } (10\text{-}18)]$$

ou, en écrivant

$$\Gamma_{\sigma\mu,\nu} = g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}:$$

$$(17\text{-}18)\qquad d(l^2) = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma_{\sigma\nu,\mu}\right)A^{\mu}A^{\nu}\,dx_\sigma.$$

Puisque $d(l^2)$ est un invariant (à l'égard du système de coordonnées), la quantité entre parenthèses est un tenseur; désignons celui-ci par $2\varphi_{\mu\nu,\sigma}$ (symétrique en μ et ν)

$$2\varphi_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma_{\sigma\nu,\mu}.$$

De même

$$2\varphi_{\mu\sigma,\nu} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} - \Gamma_{\nu\mu,\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma,\mu},$$

$$2\varphi_{\nu\sigma,\mu} = \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}.$$

De ces trois dernières équations on déduit ($\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ étant symétrique en α et β)

$$(19\text{-}18)\quad \Gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right) - \varphi_{\mu\sigma,\nu} - \varphi_{\nu\sigma,\mu} + \varphi_{\mu\nu,\sigma}.$$

Posons

$$(20\text{-}18)\qquad S_{\mu\nu,\sigma} = \varphi_{\mu\nu,\sigma} - \varphi_{\mu\sigma,\nu} - \varphi_{\nu\sigma,\mu}.$$

S est un tenseur symétrique en μ et ν; nous obtenons

$$(21\text{-}18)\qquad \Gamma_{\mu\nu,\sigma} = \begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix} + S_{\mu\nu,\sigma},$$

et, en posant

$$(22\text{-}18)\qquad S_{\mu\nu,\sigma} = g_{\sigma\tau} S^{\tau}_{\mu\nu},$$

$$(23\text{-}18)\qquad \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix} + S^{\tau}_{\mu\nu} = {}^{*}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}.$$

Le symbole de Christoffel généralisé $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ ou ${}^{*}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}$ *est invariant à l'égard du système de jauges*, car les Γ ont été introduits sans que ce système intervienne (9-18). Au contraire le tenseur $\varphi_{\mu\nu,\sigma}$ n'est pas absolu, car $d(l^2)$ dépend de la jauge.

Si nous prenons pour $\varphi_{\mu\nu,\sigma}$ le produit de $g_{\mu\nu}$ par un vecteur, nous obtenons la géométrie de Weyl, mais, avec Eddington, nous supprimons cette restriction.

Nous pouvons maintenant, d'après (23-18), exprimer le tenseur de Riemann-Christoffel généralisé

$$\begin{aligned} {}^{*}R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} &+ \frac{\partial}{\partial x_\nu} S^{\rho}_{\mu\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} S^{\rho}_{\mu\nu} + \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix} S^{\rho}_{\nu\alpha} + \begin{Bmatrix}\nu\alpha\\ \rho\end{Bmatrix} S^{\alpha}_{\mu\sigma} \\ &- \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} S^{\rho}_{\sigma\alpha} - \begin{Bmatrix}\sigma\alpha\\ \rho\end{Bmatrix} S^{\alpha}_{\mu\nu} + S^{\rho}_{\nu\alpha} S^{\alpha}_{\mu\sigma} - S^{\rho}_{\sigma\alpha} S^{\alpha}_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Les six termes qui suivent $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ se réduisent à la différence des dérivées covariantes $(S^{\rho}_{\mu\sigma})_\nu$ et $(S^{\rho}_{\mu\nu})_\sigma$, on a donc

$$(24\text{-}18)\quad {}^{*}R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} + (S^{\rho}_{\mu\sigma})_\nu - (S^{\rho}_{\mu\nu})_\sigma + S^{\rho}_{\nu\alpha} S^{\alpha}_{\mu\sigma} - S^{\rho}_{\sigma\alpha} S^{\alpha}_{\mu\nu}.$$

alisé contracté s'écrit

$$= R_{\mu\nu} + 2\varphi_{\mu\nu} - (S^{\sigma}_{\mu\nu})_{\sigma} + S^{\beta}_{\alpha\nu} S^{\alpha}_{\beta\mu} - 2\varphi_{\alpha} S^{\alpha}_{\mu\nu},$$

$$\varphi_{\mu} = S^{\sigma}_{\sigma\mu}; \qquad \varphi_{\mu\nu} = \text{dérivée cov. de } \varphi_{\mu}.$$

re $^{\star}R$ a pour expression

$$= R + 2\varphi^{\nu}_{\nu} + \lambda^{\nu}_{\nu} + S_{\nu\alpha,\beta} S^{\nu\beta,\alpha} + 2\varphi_{\alpha}\lambda^{\alpha},$$

$$\lambda_{\mu} = - S^{\sigma}_{\sigma,\mu}.$$

uer que $2\varphi_{\mu}$ et $-\lambda_{\mu}$ sont des vecteurs différents; cupe une des places symétriques, ce qui n'a pas

$$S_{\sigma\mu,\alpha} = S_{\sigma\mu}^{\sigma} \qquad \text{et} \qquad -\lambda_{\mu} = g^{\alpha\sigma} S_{\alpha\sigma,\mu} = S^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}.$$

n de $^{\star}R_{\mu\nu}$, tous les termes sont symétriques en μ Écrivons

$$2\varphi_{\mu\nu} = \underset{\text{Symétrique.}}{(\varphi_{\mu\nu} + \varphi_{\nu\mu})} + \underset{\text{Symétrique gauche.}}{(\varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu})},$$

$$^{\star}R_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}.$$

seur symétrique et $F_{\mu\nu}$ étant le tenseur symétrique

$$F_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu} = \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \varphi_{\nu}}{\partial x_{\mu}}.$$

$$= \frac{^{\star}R_{\mu\nu} + {}^{\star}R_{\nu\mu}}{2}, \qquad F_{\mu\nu} = \frac{^{\star}R_{\mu\nu} - {}^{\star}R_{\nu\mu}}{2}$$

rs absolus.

$R_{\mu\nu\sigma\rho}$ se divise de même en deux tenseurs (*voir*

$$^{\star}R_{\mu\nu\sigma\rho} = B_{\mu\nu\sigma\rho} + F_{\mu\nu\rho\sigma},$$

$B_{\mu\nu\sigma\rho}$

sont t

La v

céden

vecteu

infini

On

(34-18

On d

tense

l'indi

Te

cède.

tout

(pou

mêm

nelle

Su

lons

nous

tion

Con

don

effet

une

est

nou

D'o

I

$B_{\mu\nu\sigma\rho}$ étant symétrique gauche et $F_{\mu\nu\sigma\rho}$ symétrique en μ et ρ ; ils sont tous deux symétriques gauches en ν et σ.

La variation d'un vecteur se trouve ainsi mise sous la forme précédemment donnée (3-18), et si l est la longueur généralisée du vecteur, on a, par déplacement parallèle le long d'un contour infiniment petit limitant l'élément de surface $dS^{\nu\sigma}$, l'équation (4-18)

$$2l\,dl = F_{\mu\nu\sigma\rho}A^{\mu}A^{\rho}\,dS^{\nu\sigma}.$$

On peut vérifier que

$$F_{\mu\nu\sigma\rho} = (\varphi_{\mu\rho,\nu})_{\sigma} - (\varphi_{\mu\rho,\sigma})_{\nu}. \tag{34-18}$$

On doit remarquer que ni $^{*}R_{\mu\nu\sigma\rho}$, ni $B_{\mu\nu\sigma\rho}$, ni $F_{\mu\nu\sigma\rho}$ ne sont des tenseurs absolus, car les $g_{\mu\nu}$ doivent intervenir pour abaisser l'indice ρ. Le scalaire $^{*}R$ n'est pas non plus un invariant absolu.

Tenseurs absolus et co-tenseurs. — On voit, par ce qui précède, qu'il faut distinguer les tenseurs absolus indépendants de tout système de jauges et les tenseurs qui varient avec les jauges (pour un même système de coordonnées, c'est-à-dire pour une même division de l'Espace-Temps en cellules quadridimensionnelles).

Supposons qu'on ait adopté un système de coordonnées (rappelons que les x_{μ} sont des nombres purs) et un système de jauges ; nous avons, comme dans la théorie d'Einstein (d'après la définition 15-18),

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx_{\mu}\,dx_{\nu}.$$

Conservant la même division en cellules (le même système de coordonnées), changeons maintenant le système de jauges, et à cet effet divisons l'unité d'intervalle en chaque point d'Univers par une *fonction de point* (arbitraire) $\sqrt{n}$; le nombre exprimant ds^2 est multiplié par n. En accentuant les quantités mesurées avec les nouvelles jauges, nous avons

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu}\,dx_{\mu}\,dx_{\nu} = n\,ds^2 = n g_{\mu\nu}\,dx_{\mu}\,dx_{\nu}.$$

D'où

$$g'_{\mu\nu} = n g_{\mu\nu}, \qquad g'^{\mu\nu} = n^{-1} g^{\mu\nu}, \qquad g' = n^4 g.$$

Le tenseur des $g_{\mu\nu}$ est donc multiplié par n, nous dirons qu'il

est de dimension 1 ; le tenseur des $g^{\mu\nu}$ est multiplié par n^{-1} : il est de dimension — 1 ; le déterminant g, multiplié par n^4 est de dimension 4, etc. Quand on fait passer un indice de bas en haut ou de haut en bas, on diminue ou l'on augmente d'une unité la dimension d'un tenseur.

Ainsi, un tenseur a pour dimension l'exposant de la puissance de n par laquelle il est multiplié dans un changement de toutes les jauges, celles-ci étant divisées par $\sqrt{n}$. Les tenseurs absolus sont de dimension zéro; les tenseurs dont la dimension n'est pas nulle sont appelés *co-tenseurs*.

Les tenseurs

$$^*R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}, \quad ^*R_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}$$

sont, comme nous l'avons vu, des tenseurs absolus.

Les tenseurs

$$^*R_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad B_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad F_{\mu\nu\sigma\rho}$$

sont des co-tenseurs de dimension + 1.

Invariants absolus et co-invariants. — On distingue de même les invariants absolus, indépendants de tout système de jauges (dimension zéro), et les co-invariants dont la dimension est représentée par l'exposant de la puissance de n par laquelle il faut les multiplier quand les jauges unités sont divisées par $\sqrt{n}$.

Proposons-nous de chercher les invariants absolus.

Il n'existe pas de fonction invariante absolue des potentiels, mais on peut trouver des densités invariantes absolues.

$\sqrt{-g}$ est de dimension + 2; par conséquent en multipliant $\sqrt{-g}$ par des co-invariants de dimension — 2 nous formons des densités invariantes de dimension zéro, c'est-à-dire indépendantes du système de jauges. Les expressions suivantes sont donc des densités invariantes absolues :

$$(^*R)^2\sqrt{-g}; \qquad ^*R_{\mu\nu}\,^*R^{\mu\nu}\sqrt{-g}; \qquad ^*R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\,^*R_{\rho}^{\mu\nu\sigma}\sqrt{-g}, \qquad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}.$$

Il existe deux autres densités invariantes absolues basées sur le tenseur fondamental du sixième ordre; elles sont d'ailleurs identiques entre elles :

$$g^{\alpha\beta}(^*R)_{\alpha\beta}\sqrt{-g}; \qquad g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}(^*R_{\mu\nu})_{\alpha\beta}\sqrt{-g},$$

il y a peut-être encore une autre densité invariante absolue dérivée de ${}^*R_{\mu\nu\sigma\rho\alpha\beta}$.

Ainsi le nombre des caractères d'Univers distincts dont les combinaisons peuvent s'exprimer par des *nombres purs*, indépendants de tout système de coordonnées et de jauges, est très restreint et ne paraît pas dépasser 6.

Weyl a fait remarquer que *c'est seulement dans un Univers à nombre pair de dimensions* [1] *que les tenseurs fondamentaux donnent naissance à des densités invariantes absolues.* Un invariant a, en effet, toujours une dimension représentée par un nombre entier; or une densité invariante absolue s'obtient en multipliant une puissance convenable de l'invariant par $\sqrt{-g}$; $\sqrt{-g}$ ayant pour dimension $\frac{p}{2}$ dans un Univers à p dimensions, le produit obtenu ne pourra être de dimension zéro que si p est pair.

Un Univers à nombre impair de dimensions n'aurait aucun caractère absolu et nous ne saurions l'imaginer.

En plus des densités invariantes absolues, qui sont des caractéristiques absolues de l'Univers en chaque point, nous pouvons former un invariant absolu simple lié à un déplacement A^μ (dimension zéro) :

$$ {}^*R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu. \tag{35-18} $$

Après celui-ci, l'invariant le moins compliqué est

$$ {}^*R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\, {}^*R^{\sigma}_{\lambda\tau\rho} A^\mu A^\nu A^\lambda A^\tau. $$

Sans doute, d'autres combinaisons pourraient être imaginées, mais elles seraient très compliquées.

118. Théorie physique de l'Univers. Identification physique des tenseurs, vecteurs et invariants de la théorie géométrique (Eddington).

Le système de jauges naturel. — Soit A^μ un déplacement infi-

---

[1] Il est à peine besoin de faire remarquer que le mot « dimension » est employé dans deux sens absolument différents selon qu'il s'agit des dimensions de l'Univers ou de ce qui vient d'être appelé dimension d'un tenseur.

niment petit en un point d'Univers; c'est un nombre pur (dimension zéro), et nous avons défini sa longueur par

$$l^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \qquad \text{(dimension 1)},$$

mais cette longueur n'est invariante que par rapport au système de coordonnées.

Si nous voulons que les $g_{\mu\nu}$ ne soient pas quelconques, qu'ils se trouvent contenus dans la géométrie de l'Univers, en d'autres termes que la longueur cesse d'être une convention géométrique pour devenir une entité physique, il faut que l^2 soit un invariant absolu.

Autrement dit : le minimum d'hypothèses qu'on puisse faire sur la structure d'Univers est qu'il existe des éléments objectifs (intervalles) indépendants de ceux qui peuvent les observer (indépendants du système de coordonnées-jauges). Il est donc naturel de chercher à représenter ces éléments absolus par des invariants absolus; dès lors, le carré de l'intervalle $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$ doit être identifié avec un invariant absolu quadratique, s'il y en a un. Précisément, nous venons de voir (35-18) qu'il en existe un et un seul ${}^*R_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$; nous posons donc

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = \frac{1}{\lambda}\, {}^*R_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = \frac{1}{\lambda}\, B_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

d'où

$$B_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}, \tag{36-18}$$

λ étant une constante universelle (de dimension -1, puisque $g_{\mu\nu}$ est de dimension 1). Cette constante nous laisse libres d'adopter telle unité de longueur que nous voulons (centimètre, mètre, etc.) en un point d'Univers déterminé; l'unité de temps est le temps dans lequel la lumière parcourt cette unité de longueur, et par conséquent nous prenons pour unité la vitesse de la lumière. Ce choix étant fait en un point, les jauges en tous les points d'Univers sont fixées par la condition (36-18).

La différence qui sépare $B_{\mu\nu}$ du tenseur $R_{\mu\nu}$ de la théorie d'Einstein provient des termes issus de $\varphi^\sigma_{\mu\nu}$; nous verrons que ce tenseur $\varphi^\sigma_{\mu\nu}$ s'identifie avec « quelque chose » d'électromagnétique. Plus le champ électromagnétique est faible, c'est-à-dire plus l'espace est vide, plus $B_{\mu\nu}$ est voisin de $R_{\mu\nu}$. Dans le vide complet,

l'équation fixant le système de jauges est

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{37-18}$$

C'est précisément la loi d'Einstein (15-17). Nous obtenons donc la loi de la gravitation dans le vide d'une façon absolument indépendante des considérations développées dans la théorie primitive.

Ce résultat nous montre que, dans le *vide*, c'est-à-dire partout où il n'y a rien d' « électromagnétique » l'Univers est jaugé, d'après Einstein, conformément à (37-18) : en transportant les étalons d'un point à un autre pour la comparaison des intervalles, on emploie le système de jauges naturel.

Propagation de la lumière. — Une perturbation lumineuse issue d'un point occupe dans l'Univers un cône qui doit satisfaire une équation de la forme

$$a_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0. \tag{38-18}$$

Comme ce cône est bien déterminé et n'a aucun rapport avec un système quelconque de coordonnées ou de jauges, il est nécessaire que $a_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu$ soit un invariant absolu, et par conséquent que $a_{\mu\nu}$ soit un tenseur absolu. *Ce ne peut être que* $\alpha\,{}^*\mathrm{R}_{\mu\nu}$ où α est une fonction des coordonnées. On a donc, pour équation du cône lumineux,

$$\alpha\,{}^*\mathrm{R}_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = \alpha\,\mathrm{B}_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0. \tag{39-18}$$

Nous voyons que, dans la théorie d'Einstein où la propagation de la lumière s'exprime par $g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0$, l'Univers est jaugé conformément à l'équation

$$\mathrm{B}_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} g_{\mu\nu}. \tag{40-18}$$

Nous avons le droit d'écrire cette équation partout où la lumière se propage, c'est-à-dire partout où il existe un Univers tangent, autrement dit en tout point, sauf à l'intérieur de l'électron si celui-ci est un point singulier. α pourrait être une fonction de point, mais la condition de jaugage dans le vide (37-18) — ou la

i de la gravitation dans le vide — nous montre que

$$\frac{1}{\alpha} = \lambda = \text{const.}$$

Nous pouvons donc conclure que partout où la lumière peut se propager, le jaugage employé dans la théorie d'Einstein est le jaugage naturel.

Ainsi Eddington a réussi à supprimer la difficulté qui avait conduit Weyl à poser $F_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}$ de manière que la longueur nulle reste nulle quel que soit le déplacement. Dans la théorie d'Eddington, une longueur nulle peut ne pas rester nulle par déplacement parallèle, mais cette généralisation de la théorie n'apporte aucune ambiguïté pour la propagation de la lumière, parce que le cône lumineux est défini par la seule équation invariante absolue qu'on puisse former. La condition qui exprime que ce cône correspond à la longueur nulle, condition nécessaire pour que la trajectoire du rayon lumineux nous apparaisse comme déterminée est précisément celle qui sert de base pour la détermination du système de jauges naturel.

La courbure constante. — Avec le système de jauges naturel, l'Univers possède une courbure constante; prenant les scalaires des deux membres de (36-18) on a, en effet

$$B = {}^{*}R = 4\lambda, \tag{41-18}$$

qui dans le vide, devient $R = 4\lambda$.

Il est bien évident que la constante λ ne saurait être nulle, c'est-à-dire que les dimensions de l'Univers ne peuvent être infinies par rapport à nos systèmes de mesures, car il n'y aurait plus de système de jauges naturel. Suivant les termes d'Eddington « il n'y aurait aucune jauge naturelle pour déterminer, par exemple, les dimensions d'un électron; l'électron ne pourrait savoir quelle grandeur il devrait prendre s'il n'avait plus de point de comparaison ».

Nous sommes donc conduits, plus logiquement et plus directement que dans la théorie primitive, à la conception de la courbure constante et de l'espace fini: L'Univers jaugé dans le système naturel est nécessairement à courbure (${}^{*}R$) constante, puisque cette condition est imposée par celle qui détermine le système de

jauges. Cela revient à dire que le système naturel consiste à prendre pour jauge en chaque point le rayon de courbure de l'Univers, ou encore que tout instrument de mesure, tout objet est une portion déterminée et constante de l'Univers; que tout électron doit avoir pour rayon une fraction constante du rayon de courbure d'Univers au point où il se trouve. Si le rayon d'Univers changeait d'un point à l'autre — par rapport à un sur-étalon que nous ne saurions d'ailleurs imaginer — l'électron, nos instruments, nous-mêmes, tout changerait dans le même rapport : par conséquent le rayon de courbure doit nous apparaître comme constant. Par le choix de notre système de jauges, nous forçons l'Univers à posséder une courbure constante.

Si l'on se place au point de vue de la théorie généralisée, et si c'est $^*R$ qu'on envisage comme « courbure », cette courbure est constante, non pas seulement dans le vide, mais *partout*. Si l'on conserve le point de vue de la théorie d'Einstein, en séparant le champ de gravitation et le champ électromagnétique, et appelant *courbure* le scalaire R qui ne fait pas intervenir les $S^{\sigma}_{\mu\nu}$, on doit dire que les électrons correspondent à des déformations locales; l'Univers apparaît comme déformé dans les régions où de la matière est présente, et c'est précisément cette déformation qui constitue la matière. L'électron devient une région de forte courbure bien que, avec le système de jauges naturel, $^*R$ ait la même valeur que dans le vide. Cela signifie que les $S^{\sigma}_{\mu\nu}$ qui font différer $B_{\mu\nu}$ $(=\lambda g_{\mu\nu})$ de $R_{\mu\nu}$ doivent être considérables dans l'électron, ce qui revient à dire que le champ électrique doit y être colossal.

La matière et l'électricité. — Après avoir identifié l'Espace-Temps, il nous faut identifier la « substance » qu'il contient, c'est-à-dire trouver des tenseurs géométriques qui correspondent aux tenseurs physiques par lesquels nous représentons les grandeurs que nous révèle l'expérience. Ces tenseurs géométriques n'ont pas besoin d'être des tenseurs absolus, car l'étude expérimentale des phénomènes suppose que nous utilisons le système de jauges naturel (aux faibles erreurs près dues à l'ambiguïté résultant de la non-intégrabilité des longueurs), et nous n'avons aucune raison de penser que toutes les lois de notre science doivent se conserver dans un système de jauges arbitraire.

Le tenseur d'énergie et la loi de la gravitation. — Désignons par T_μ^ν le tenseur *total* d'énergie; ce tenseur doit vérifier la loi de conservation exprimée par $T_{\mu,\nu}^\nu = 0$; il faut donc l'identifier à un tenseur géométrique dont la divergence soit nulle. Ici, il n'y a rien à changer à la théorie primitive, car la généralisation de Weyl-Eddington n'introduit pas de nouveau tenseur à divergence nulle qui puisse être adopté [1]. On a donc, comme dans la théorie d'Einstein,

$$R_\mu'^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R' = -\varkappa T_\mu^\nu \tag{42-18}$$

avec

$$R_\mu'^\nu = R_\mu^\nu - \lambda g_\mu^\nu, \qquad R' = R - 4\lambda,$$

λ est une constante qui n'est pas déterminée par la loi de conservation, mais qui est fixée par la condition que le tenseur T_μ^ν disparaisse en l'absence de matière et de champ électromagnétique, ce qui donne *dans le vide*

$$R = 4\lambda,$$

$$R_\mu^\nu - \lambda g_\mu^\nu = 0 \qquad \text{ou} \qquad R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

D'après (37-18), la constante λ est la même que celle qui s'introduit dans la définition du système de jauges naturel et qui est égale à $\frac{1}{4}\,{}^\star R$.

Le champ électromagnétique. — Le tenseur $F_{\mu\nu}$ des forces électrique et magnétique (n° 97) doit satisfaire le premier groupe (15-15) des équations de Maxwell (généralisées)

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{43-18}$$

et ces équations deviennent des identités si $F_{\mu\nu}$ est le rotationnel d'un vecteur. Nous voyons donc qu'il n'y a qu'un tenseur géométrique que nous puissions identifier (à un facteur constant près) avec le tenseur des forces électriques et magnétiques: c'est celui que nous avons précisément désigné par $F_{\mu\nu}$ dans la théorie géo-

---

[1] La divergence de $R^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu\,{}^\star R$ n'est pas identiquement nulle.

métrique (31-18). Le vecteur φ_μ, dont $F_{\mu\nu}$ est le rotationnel, est le potentiel.

C'est bien la seule identification possible, car si l'on identifiait le champ électromagnétique avec le rotationnel de λ_μ (28-18), le tenseur fondamental $F_{\mu\nu}$ ne présenterait plus aucun caractère justifiant son existence [1].

Le quadrivecteur courant électrique. — Le vecteur densité de courant-densité de charge doit satisfaire à la loi expérimentale de conservation de l'électricité. Il faut donc que $J^\mu_\mu = 0$; cette équation devient une identité si J^μ est la divergence d'un tenseur symétrique gauche contrevariant; nous sommes ainsi conduits à identifier J^μ avec la divergence de $F^{\mu\nu}$,

$$J^\mu = F^{\mu\nu}_\nu. \tag{44-18}$$

Ces équations représentent, comme nous l'avons vu précédemment, le second groupe des équations de Maxwell.

Eddington a donc réussi à trouver les tenseurs *géométriques*

$$-\frac{1}{\varkappa}\left(R'^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} R'\right) \qquad \text{ou} \qquad -\frac{1}{\varkappa}\left[R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu}\left(R - \frac{1}{2}{}^{*}R\right)\right],$$

$$\varphi_\mu = \frac{1}{2} S^{\sigma}_{\sigma\mu}, \qquad F_{\mu\nu} = \text{rot. de } \varphi_\mu, \qquad J^\mu = \text{div. de } F^{\mu\nu},$$

qui, dans notre science expérimentale, se présentent à nous sous les aspects de tenseur d'impulsion et d'énergie, potentiel électromagnétique (potentiel vecteur et potentiel scalaire de la théorie ancienne), champ électromagnétique, courant électrique (densité de courant et densité de charge de la théorie ancienne).

Le problème de la matière. — Lorsque nous avons étudié le tenseur matériel, en supposant la matière continue, c'est-à-dire en l'envisageant sous l'aspect macroscopique, nous avons vu que le scalaire de ce tenseur représente la densité au repos.

Nous avons montré, d'autre part, qu'il est impossible de construire un électron et, par suite, de la matière à partir du champ électromagnétique seul, parce que le scalaire du tenseur d'énergie

---

[1] Mais on ne voit pas ce que représente physiquement λ_μ.

électromagnétique est nul; on savait d'ailleurs déjà que l'électron ne pouvait exister qu'en admettant des forces de cohésion non maxwelliennes (pression de Poincaré). Ce sont ces faits qui ont conduit Einstein à modifier la loi de la gravitation et à introduire le terme cosmologique $-\lambda g_{\mu\nu}$ (nº 107).

Admettons, pour un moment, la *continuité* dans la structure géométrique de l'Univers, et partons de la loi de la gravitation, basée sur la conservation de l'impulsion-énergie,

$$(45\text{-}18)\qquad -\varkappa T_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu}(R - 2\lambda) = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu}\left(R - \frac{1}{2}{}^{\star}R\right),$$

où T_{μ}^{ν} représente maintenant le tenseur *total* d'énergie; nous pouvons calculer le scalaire de ce tenseur; nous devrons considérer ce scalaire comme représentant, en chaque point, la densité au repos de la substance; nous aurons ainsi l'expression microscopique de la densité au repos.

D'après (25-18), (30-18), (31-18), nous avons

$$(46\text{-}18)\qquad {}^{\star}R_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\qquad \begin{cases} B_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu} + \varphi_{\nu\mu} - (S_{\mu\nu}^{\sigma})_{\sigma} \\ \qquad\qquad + S_{\alpha\nu}^{\beta} S_{\beta\mu}^{\alpha} - 2\varphi_{\alpha} S_{\mu\nu}^{\alpha}, \\ F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \dfrac{\partial \varphi_{\nu}}{\partial x_{\mu}} \quad \text{(symétrique gauche).} \end{cases}$$

Nous pouvons écrire

$$(47\text{-}18)\qquad B_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + H_{\mu\nu},\qquad {}^{\star}R = B = R + H,$$

avec

$$(48\text{-}18)\qquad H_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \varphi_{\nu\mu} - (S_{\mu\nu}^{\sigma})_{\sigma} + [S_{\alpha\nu}^{\beta} S_{\beta\mu}^{\alpha} - 2\varphi_{\alpha} S_{\mu\nu}^{\alpha}],$$

$$(49\text{-}18)\qquad H = 2\varphi_{\alpha}^{\alpha} + \lambda_{\alpha}^{\alpha} + [S_{\alpha\beta,\gamma} S^{\alpha\gamma,\beta} + 2\varphi_{\alpha}\lambda^{\alpha}].$$

On a alors les relations

$$(50\text{-}18)\qquad \varkappa T = -H = R - R^{\star}$$

[identique à (21-17), car dans le système de jauges naturel, ${}^{\star}R$ est la valeur de R dans le vide), et, en tenant compte de $B_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ (système naturel),

$$(51\text{-}18)\qquad \varkappa T_{\mu}^{\nu} = H_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} H.$$

Cette formule, se rapportant au tenseur $S_{\mu\nu}^{\sigma}$, donne l'*aspect*

électrique du tenseur impulsion-énergie, par opposition avec (45-18) qui en donne l'aspect gravitationnel.

D'après (50-18) nous avons, pour expression de la densité de « substance » en chaque point d'Univers,

$$(52\text{-}18)\qquad -\frac{H}{\varkappa} = -\frac{1}{\varkappa}\left(2\varphi^{\alpha}_{\alpha} + \lambda^{\alpha}_{\alpha} + [S_{\alpha\beta,\gamma}S^{\alpha\gamma,\beta} + 2\varphi_{\alpha}\lambda^{\alpha}]\right).$$

Rappelons que

$$S_{\alpha\beta,\gamma} = \varphi_{\alpha\beta,\gamma} - \varphi_{\alpha\gamma,\beta} - \varphi_{\gamma\beta,\alpha}, \qquad \lambda_{\alpha} = -S^{\sigma}{}_{\sigma,\alpha}.$$

La substance apparaît ainsi comme une structure d'Univers qu'on peut caractériser par un scalaire formé à partir des tenseurs géométriques fondamentaux $g_{\mu\nu}$ (ou $B_{\mu\nu}$ puisque, dans le système de jauges naturel, $B_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$) et $\varphi_{\mu\nu,\sigma}$.

Avec la restriction de Weyl, $H_{\mu\nu}$ et H prennent une forme beaucoup plus simple. Admettons que $\varphi_{\mu\nu,\sigma}$ soit le produit de $g_{\mu\nu}$ par un vecteur; pour avoir $2\varphi_{\mu} = S^{\sigma}_{\sigma\mu}$ (26-18), nous devons poser

$$(53\text{-}18)\qquad \varphi_{\mu\nu,\sigma} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi_{\sigma}.$$

Le calcul des différents termes de $H_{\mu\nu}$ et de H donne

$$(54\text{-}18)\quad \begin{cases} H_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}(\varphi_{\mu\nu} + \varphi_{\nu\mu}) + \dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi^{\alpha}_{\alpha} + \dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi_{\alpha}\varphi^{\alpha} - \dfrac{1}{2}\varphi_{\mu}\varphi_{\nu}, \\ H \;\; = {}^{*}R - R = 3\varphi^{\alpha}_{\alpha} + \dfrac{3}{2}\varphi_{\alpha}\varphi^{\alpha}. \end{cases}$$

Il est permis de se demander si les forces de cohésion mystérieuses (pressions de Poincaré) qui permettent l'existence de l'électron ne seraient pas les $S^{\tau}_{\mu\nu}$ qui, ajoutées aux composantes du champ de gravitation $\left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\}$, constituent les forces, invariantes vis-à-vis de tout système de jauges, c'est-à-dire *absolues*, ${}^{*}\left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\}$ (¹) (23-18). Toujours est-il que l'union du tenseur de gravitation $g_{\mu\nu}$ et du tenseur « d'électricité » $\varphi_{\mu\nu,\sigma}$ (ou plus simplement, si l'on admet la restriction de Weyl, l'union du tenseur $g_{\mu\nu}$ et du potentiel électromagnétique φ_{μ}) suffit pour déterminer H, c'est-à-dire

(¹) Il est à remarquer que les $S^{\tau}_{\mu\nu}$ constituent un tenseur, alors que les $\left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\}$, ${}^{*}\left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\}$ ne sont pas les composantes d'un tenseur.

pour rendre compte de l'existence des électrons et de la matière, alors que le champ de gravitation et les forces maxwelliennes $F_{\mu\nu}$ ne suffisaient pas. « Le potentiel électromagnétique a en lui quelque chose de fondamental qui disparaît quand nous en prenons le rotationnel pour obtenir la force électromagnétique observable » (Eddington).

Mais, dans le calcul qui vient d'être fait, il y a une hypothèse bien douteuse : la structure est supposée continue. Nous ne pensons pas que ce soit exact, car l'expérience a révélé une loi de discontinuité étrange, la loi des *quanta* : on ne voit pas comment la faire intervenir dans la théorie; elle est peut-être même tout à fait en dehors du domaine de la théorie de la relativité. Où est la discontinuité? Intervient-elle dans la constitution de l'électron? Ce sont des questions auxquelles nous ne pouvons répondre aujourd'hui. Toujours est-il que les lois du continu ne doivent pas être applicables à l'électron. Peut-être cependant les considérations qui précèdent sur la densité de la substance contiennent-elles une part de vérité en décrivant une structure *moyenne* dans un domaine de dimensions comparables aux dimensions qu'on attribue à l'électron, et qui est pour nous un domaine extrêmement petit.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES.

La loi de la gravitation est maintenant connue : elle englobe toute la dynamique et bouleverse les anciennes conceptions. Jusqu'à la découverte d'Einstein, non seulement on ignorait la loi exacte, mais on était bien loin de soupçonner la véritable nature du champ de gravitation : on est certain aujourd'hui que ce champ est la manifestation du caractère non euclidien de la structure géométrique de l'Univers.

L'Univers est caractérisé, en chaque point-événement, par ses propriétés géométriques, liées à la présence ou au voisinage de la matière. L'espace n'est ni un vide amorphe, ni l'éther quasi matériel de l'ancienne physique, et il ne doit pas être infini.

Le temps est l'aspect d'une des dimensions de la multiplicité quadridimensionnelle qui constitue l'Univers; il reste quelque

chose de mystérieux. S'il existe un système de référence privilégié auquel est lié un « temps d'Univers absolu » (hypothèse cosmologique d'Einstein), ce temps absolu n'est pas en toute rigueur celui que nous percevons et que nous pouvons mesurer; pour nous il y a toujours, suivant la conception de Minkowski, union de l'espace et du temps; la division de l'Univers en « espace » et en « temps » n'est possible qu'en choisissant convenablement les coordonnées, et elle est relative à l'observateur.

Toutefois, les phénomènes de la Nature ont un caractère absolu, parce qu'ils sont déterminés par des coïncidences absolues dans l'Espace-Temps, des intersections de lignes d'Univers. Il y a des réalités que la science peut atteindre : elles se traduisent par des lois qui s'expriment à l'aide d'équations intrinsèques, de relations *tensorielles* où tout système de coordonnées a disparu.

Cependant, la théorie de la relativité ne remonte pas aux causes profondes des phénomènes; elle ne fait pas connaître la nature du substratum universel. C'est une description en langage mathématique, une interprétation géométrique des lois physiques et une magnifique synthèse de ces lois. C'est « la science de la structure et non celle de la substance » (Eddington).

La mécanique et la physique sont ramenées à la géométrie non euclidienne de Riemann, ou plus exactement à la géométrie plus générale encore de Weyl-Eddington; c'est là le fond de la théorie. Dans cette géométrie, on groupe dans un « tenseur » des grandeurs inséparables les unes des autres, et l'annulation d'un tenseur (ou l'égalité de deux tenseurs) exprime une propriété intrinsèque de l'Univers. En mécanique et en physique, on forme des tenseurs avec des grandeurs que nous révèle notre science expérimentale; la théorie de la relativité affirme que les tenseurs mécaniques et physiques fondamentaux doivent être égalés à certains tenseurs de la géométrie riemannienne.

Les tenseurs mécaniques et physiques sont égaux à des tenseurs géométriques : cela ne saurait être mis en doute, mais comment faut-il comprendre ces égalités? S'agit-il d'*équations* ou s'agit-il d'*identités?* La loi de la gravitation, les lois de l'électromagnétisme sont elles des conditions imposées par la Nature aux relations entre la matière et l'Espace-Temps, ou ne sont-elles que des identifications de l'aspect physique et de l'aspect géométrique des

propriétés d'une même entité? Si l'Espace-Temps et la matière sont deux entités distinctes, les lois fondamentales sont des équations. Mais si nous admettons, avec M. Eddington, que les particules qui, en dernière analyse, constituent la matière ne sont autre chose qu'une singularité de la structure géométrique d'Univers, la matière cesse d'être une entité primordiale, les tenseurs mécaniques et physiques deviennent des tenseurs géométriques *vus sous un aspect relatif à notre interprétation de la Nature, relatif à notre entendement.*

Admettons cette conception. Est-ce dire que la loi de la gravitation, par exemple, est complètement subjective? Non pas, au fond, car il existe un théorème : « la divergence du tenseur

$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu}\left(R - \frac{{}^{*}R}{2}\right)$$

est identiquement nulle », qui est une propriété intrinsèque de la structure de l'Univers, une vérité objective. Mais la loi de conservation de l'impulsion-énergie et la loi de la gravitation sont des aspects subjectifs de cette vérité. L'homme a recherché ce qui, dans la Nature, se présente à ses yeux comme permanent : il a trouvé les lois de conservation de la masse, de l'énergie, de la quantité de mouvement; par synthèses successives, il a été conduit à identifier les grandeurs *physiques* qu'on peut grouper dans un tenseur, le tenseur T_{μ}^{ν}, avec les grandeurs qui constituent le tenseur de courbure conservatif écrit plus haut : c'est la loi de la gravitation, d'où découle toute la dynamique. On ne peut pas prétendre que la Nature force l'Univers à se courber dans les régions où il y a de la matière, et force la matière à suivre les lois de la dynamique, car *c'est nous qui définissons la matière de façon que ces lois soient satisfaites;* ce que nous avons appelé tenseur impulsion-énergie n'est pas autre chose qu'un tenseur d'Univers conservatif; notre loi de conservation, ainsi que notre loi de la gravitation ne sont, en somme, que des identités.

Les généralisations successives (Weyl, Eddington) de la théorie d'Einstein n'enlèvent aucune rigueur à cette théorie; elles la complètent sans l'altérer. Ces généralisations établissent que le tenseur absolu ${}^{*}R_{\mu\nu}$ est décomposable en deux tenseurs, $B_{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu}$; dans

le système de jauges naturel, qui correspond à la réalité de nos observations, $B_{\mu\nu}$ est proportionnel à $g_{\mu\nu}$. On peut, dans la description géométrique de l'Univers, considérer séparément le tenseur $B_{\mu\nu}$ ou $g_{\mu\nu}$ qui décrit le champ de gravitation, et le tenseur $F_{\mu\nu}$ qui décrit le champ électromagnétique : c'est ce qu'avait fait Einstein; l'« intervalle » d'Einstein est absolu, puisque c'est l'invariant absolu $B_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$: l'œuvre d'Einstein reste donc intacte, elle n'est nullement atteinte par l'ambiguïté que l'existence du champ électromagnétique apporte dans la comparaison des longueurs.

L'intérêt de la généralisation est considérable. Partant des propriétés les plus générales que doit posséder un Univers quadridimensionnel, la géométrie pure nous enseigne qu'il doit exister deux catégories de propriétés qui correspondent, l'une à la non-intégrabilité de la direction, l'autre à la non-intégrabilité de la longueur; il doit en résulter, à nos yeux, deux catégories de phénomènes, deux champs de force de natures différentes. La quadruple indétermination des coordonnées doit entraîner quatre lois de conservation; l'indétermination du système de jauges doit donner une cinquième loi de conservation.

C'est bien ce que la Nature nous révèle. Nous connaissons deux champs de force : le champ de gravitation et le champ électromagnétique. La conservation de l'impulsion-énergie s'exprime par quatre équations, la cinquième loi est celle de la conservation de l'électricité.

Quelle que puisse être, dans l'avenir, l'évolution des idées, l'union de l'espace et du temps, l'inertie et la pesanteur de l'énergie, la loi de la gravitation, la dynamique de la relativité, la courbure de l'Univers, les lois générales de l'électromagnétisme sont des résultats, presque tous dus au génie d'Einstein, qui resteront acquis à la Science.

La théorie actuelle pourra être retouchée ou plutôt complétée, surtout en ce qui concerne les hypothèses cosmologiques et la généralisation de la théorie d'Einstein. Mais ce qu'on peut affirmer, c'est qu'un retour en arrière, vers les idées encore enracinées dans quelques esprits, est une chose impossible.